



# Évaluation de performance des réseaux de données

Thomas Bonald

Habilitation à diriger des recherches  
Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)  
Spécialité : Informatique

Soutenue publiquement le 15 janvier 2010 devant le jury composé de :

Rapporteurs :

Alain Jean-Marie, directeur de recherche INRIA, Université Montpellier 2

Jean Mairesse, directeur de recherche CNRS, Université Paris 7

Armand Makowski, professeur, University of Maryland

Examineurs :

Serge Fdida, professeur, Université Paris 6

Ravi Mazumda, professeur, Université of Waterloo

Philippe Robert, directeur de recherche INRIA

Jim Roberts, chercheur INRIA



# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>3</b>
<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>7</b>
1.1 Entre théorie et pratique . . . . .	7
1.2 L'aléa du trafic . . . . .	8
1.3 Principe de modélisation . . . . .	9
1.4 Structure du mémoire . . . . .	10
1.5 Résumé des contributions . . . . .	11
1.6 Notations . . . . .	12
<b>2 Partage d'un lien</b>	<b>13</b>
2.1 Modèle . . . . .	13
2.2 Taux de blocage . . . . .	14
2.3 Taux de congestion . . . . .	14
2.4 Taux d'insatisfaction . . . . .	15
2.5 Débit moyen . . . . .	16
2.6 Taux de perte . . . . .	16
2.7 Comparaison des métriques . . . . .	16
2.8 Notes bibliographiques . . . . .	16
<b>3 Systèmes multi-débits</b>	<b>17</b>
3.1 Modèle . . . . .	17
3.2 Taux de blocage . . . . .	18
3.3 Taux de congestion . . . . .	19
3.4 Taux d'insatisfaction . . . . .	20
3.5 Débit moyen . . . . .	20
3.6 Taux de perte . . . . .	21
3.7 Comparaison des métriques . . . . .	22
3.8 Notes bibliographiques . . . . .	22
<b>4 Réseaux</b>	<b>23</b>
4.1 Modèle . . . . .	23
4.2 Taux de blocage . . . . .	24
4.3 Taux de congestion . . . . .	25
4.4 Taux d'insatisfaction . . . . .	25
4.5 Débit moyen . . . . .	26
4.6 Taux de perte . . . . .	27
4.7 Comparaison des métriques . . . . .	28
4.8 Notes bibliographiques . . . . .	28

<b>5 Extensions</b>	<b>29</b>
5.1 Flots permanents . . . . .	29
5.2 Sessions permanentes . . . . .	30
5.3 Réseaux et multi-débits . . . . .	32
5.4 Contrôle d'admission . . . . .	32
5.5 Routage dynamique . . . . .	32
5.6 Routage multi-chemins . . . . .	33
5.7 Réseaux sans fil . . . . .	34
5.8 Notes bibliographiques . . . . .	34
<b>6 Conclusion</b>	<b>35</b>
6.1 Quelques résultats solides . . . . .	35
6.2 Quelques pistes à explorer . . . . .	35
<b>A Réseaux de Kelly-Whittle</b>	<b>37</b>
A.1 Files en parallèle . . . . .	37
A.2 Routage statique . . . . .	38
A.3 Routage dynamique . . . . .	38
<b>B Biais d'activité</b>	<b>39</b>
B.1 Une file . . . . .	39
B.2 Un réseau . . . . .	40
B.3 Ordre stochastique . . . . .	40
<b>C Équité équilibrée</b>	<b>41</b>
C.1 Systèmes multi-débits . . . . .	41
C.2 Réseaux . . . . .	42
<b>Bibliographie</b>	<b>43</b>

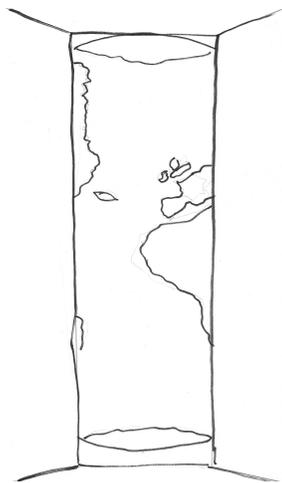
# Avant-propos

L'écriture d'un mémoire d'habilitation à diriger des recherches est un exercice de style, avec ses règles propres. En l'espèce, il ne s'agit ni plus ni moins que de résumer sa vie, fût-elle professionnelle, en une quarantaine de pages. Fichtre! Tout ça pour ça. C'est moins effrayant que de savoir que son code génétique tient sur un CD, mais tout de même, ça fait un choc. Pour me rassurer, j'ai inclus un dessin à ce mémoire, réalisé par ma fille Zoé et reproduit ci-dessous : au moins, dans sa version originale, ce mémoire est d'entropie infinie...

Évidemment, et en toute modestie, j'ai échoué. Il a fallu faire des coupes sombres. J'ai donc orienté le mémoire vers les résultats en lesquels je crois le plus et qui, soyons fous, peut-être, me survivront. Les autres sont cités dans l'introduction.

Une conséquence logique de l'exercice est un texte égocentré, dont la bibliographie<sup>1</sup> est le signe patent. J'espère que cela ne masquera pas le fait que, bien sûr, mes résultats (nos, devrais-je dire) n'auraient pas vu le jour sans mes camarades de fortune. Dans la brume, aux frontières de la connaissance, on a besoin des autres pour se rassurer et avancer.

J'espère que ce mémoire servira à d'autres. J'ai en tout cas pris beaucoup de plaisir à l'écrire, ce qui est bon signe, sans être un gage de réussite. Peut-être est-ce simplement lié au fait d'écrire en français<sup>2</sup>, ce qui, par déformation professionnelle, m'arrive si rarement. C'est sûrement aussi la satisfaction de rassembler des idées qui traînaient çà et là, comme on range des bibelots tapis au fond d'un tiroir, et de découvrir, comme souvent dans ces cas-là, quelques trésors oubliés.



« S'il te plaît... dessine-moi Internet »

---

1. Je précise ici que, contrairement à l'usage, nous avons systématiquement choisi l'ordre alphabétique pour la signature des articles ; un pour tous et tous pour un !

2. Du français, ça ? Des équations pleines de gros mots, oui ! (note d'une amie artiste).



# Remerciements

Tout d'abord, la reconnaissance du ventre : merci à mon employeur France Télécom, et plus particulièrement à ceux de ses managers qui se battent pour que la recherche garde toute sa place dans l'entreprise. Elles ont toutes deux beaucoup à y gagner ; en faire la preuve demande de l'intelligence et, sous la pression des actionnaires, une certaine forme de courage.

Merci ensuite à Jim Roberts, qui, s'il a fait partie de ces managers-là, a surtout guidé mes recherches en posant sans relâche les bonnes questions, avec une singulière lucidité ; qualité qui, soit dit en passant, lui fait curieusement défaut en matière sportive, comme le montre son soutien indéfectible pour l'équipe de rugby anglaise (ou galloise, selon la direction du vent).

Je remercie naturellement mes collègues et amis Nabil Benameur, Mathieu Feuillet, Nidhi Hegde, Raluca Indre, Matthieu Jonckheere, Fabien Mathieu, Luca Muscariello, Philippe Olivier, Sara Oueslati, Diego Perino, Alexandre Proutière, Gwenaël Régnier, Jim Roberts, encore lui, Chloé Rolland, Minh-Anh Tran, Jorma Virtamo et j'en passe, avec qui j'ai partagé de longues heures de travail et, pour certains d'entre eux, quelques soirées bien arrosées.

Il me reste enfin à remercier les membres du jury. Lire un obscur mémoire, en extraire la substantifique moëlle, y ajouter sa sauce et servir le tout bien chaud le jour de la soutenance relève du grand art. Merci à eux, donc, pour leur travail et leur disponibilité.



# Chapitre 1

## Introduction

*« My experiences also strongly confirmed my previous opinion that the best theory is inspired by practice and the best practice is inspired by theory. »*

Donald E. Knuth, *Theory and Practice*,  
Theoretical Computer Science, 1991.

### 1.1 Entre théorie et pratique

Ce sont des questions très pratiques qui ont donné naissance à l'analyse de performance des réseaux, puis à la théorie des files d'attente qui en est issue. Au début du XXème siècle, deux ingénieurs scandinaves, Agner Krarup Erlang et Tore Olaus Engset, trouvent indépendamment des formules très proches pour calculer la probabilité de rejet d'un appel téléphonique pour un ensemble d'utilisateurs reliés au même concentrateur. Ainsi, les opérateurs téléphoniques peuvent dimensionner leur réseau au plus juste, tout en garantissant une qualité de service acceptable à leurs clients.

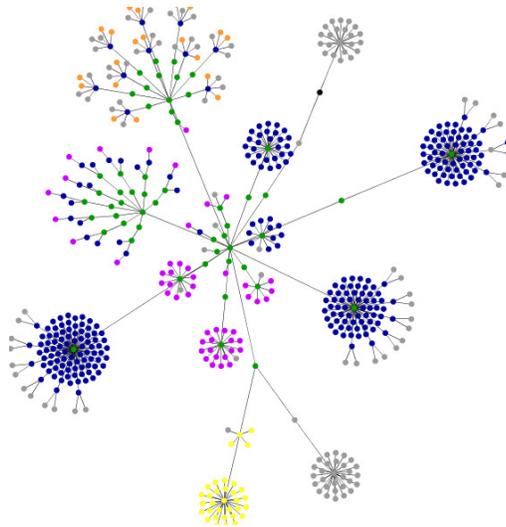


FIGURE 1.1 – Illustration de la « plastique » de l'informatique et des réseaux, entre aléa et structure : une vue graphique de la page d'accueil de Wikipedia, réalisée à partir de <http://www.aharef.info>.

Aujourd’hui encore, cette discipline scientifique est d’abord motivée par la minimisation du coût des réseaux, tant en termes d’investissement (installation de nouveaux équipements) que d’exploitation (maintenance, consommation énergétique). Naturellement, les réseaux sont devenus extraordinairement complexes, et la qualité de service associée a pris de multiples formes (débit, délai, taux de perte). La théorie a donc évolué avec la technologie, tantôt la précédant (le RNIS<sup>1</sup>), tantôt la suivant (Internet).

Cette interaction, extrêmement féconde, est l’une des caractéristiques les plus remarquables de ce domaine de recherche : beaucoup plus que les systèmes physiques ou biologiques, les réseaux et systèmes informatiques sont maléables, évolutifs. On peut à loisir changer les règles du jeu (les algorithmes, les protocoles) ; les expériences sont faciles et peu coûteuses. Cette souplesse du matériau rend la théorie d’autant plus nécessaire : comme tout ou presque est possible, elle est une aide précieuse pour faire les bons choix, et concevoir *in fine* des réseaux performants et fiables. Réciproquement, la recherche d’outils théoriques devrait toujours être guidée par les problèmes que se posent (vraiment) les ingénieurs, sous peine de résoudre de faux problèmes, promis à l’oubli.

Ceci m’a conduit à présenter mes résultats par leur côté pratique, applicatif, plutôt que théorique. D’abord, c’est ce qui a motivé mon travail (et intéressé mon employeur). Ensuite, cela rendra la lecture du mémoire plus facile, selon le principe qu’un dessin (ou un exemple) vaut toujours mieux qu’un long discours. Enfin, cela ne nuit pas à l’applicabilité des outils mathématiques sous-jacents à d’autres domaines de l’informatique, de même que les premiers modèles de partage temporel de processeurs sont utilisés dans ce mémoire à de toutes autres fins.

## 1.2 L’aléa du trafic

La formule d’Erlang, que nous introduisons au chapitre suivant, reste l’archétype du résultat d’analyse de performance. Elle résume par une expression très simple l’impact de l’aléa du trafic téléphonique (instants des début et fin d’appel, tels qu’illustrés par la FIG. 1.2) sur la qualité de service, exprimée par la probabilité de rejet d’un appel (ou blocage). Une propriété essentielle de cette formule est son *insensibilité* : elle ne dépend des caractéristiques du trafic qu’au travers une valeur moyenne<sup>2</sup> représentant l’*intensité de trafic*, définie comme le produit du taux d’arrivée des appels par leur durée moyenne, exprimée en Erlangs et égale par la loi de Little au nombre moyen d’appels simultanés en l’absence de blocage (la « hauteur » moyenne de la bande sur le graphe (a) de la FIG. 1.2). Ceci explique largement le succès de cette formule, à la fois simple et robuste, utilisée encore aujourd’hui malgré le profond bouleversement qu’ont connu la technologie et les usages de la téléphonie.

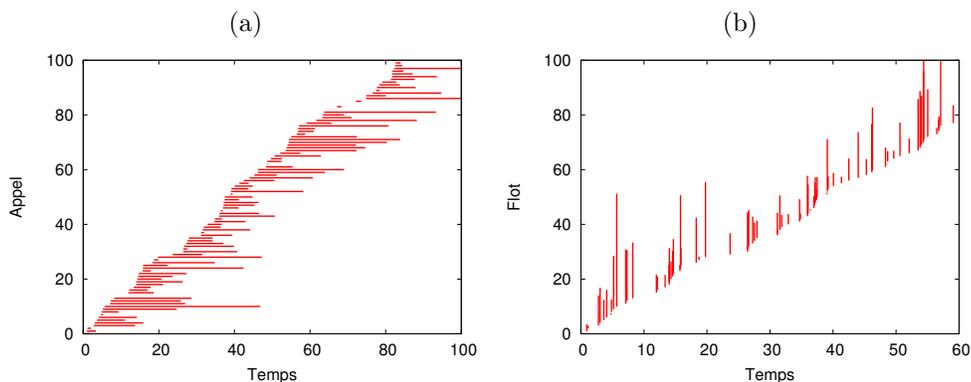


FIGURE 1.2 – Aléa du trafic (a) téléphonique, (b) de données.

1. Réseau numérique à intégration de service, normalisé en 1984.

2. Contrairement à une idée reçue, il n’est même pas nécessaire de supposer que les appels arrivent selon un processus de Poisson, cf. [6].

Le Graal, c'est une formule d'Erlang applicable aux réseaux de données. Car, comme en téléphonie, la qualité des services liés à Internet dépend avant tout du fait que les ressources du réseau sont partagées par un nombre dynamique et aléatoire d'utilisateurs actifs. Schématiquement, des flots de données sont générés à des instants aléatoires et ont des volumes aléatoires, comme illustré par le graphe (b) de la FIG. 1.2. L'intensité de trafic se définit alors comme le produit du taux d'arrivée des flots par leur volume moyen, en bit/s. Idéalement, on souhaiterait que la performance ne dépende également des caractéristiques du trafic que par son intensité, de manière à avoir des résultats *insensibles* aux évolutions futures du trafic.

Notons que le trafic n'est évidemment pas la seule source d'aléa dans les réseaux. La topologie même du réseau, la propagation des signaux dans les différents media du réseau, notamment radio, et certains algorithmes d'accès au medium (dont Ethernet) en sont des exemples notables. Nous négligerons ces aspects, qui peuvent être typiquement analysés séparément ; quelques exemples sont cités au §1.5 ci-dessous.

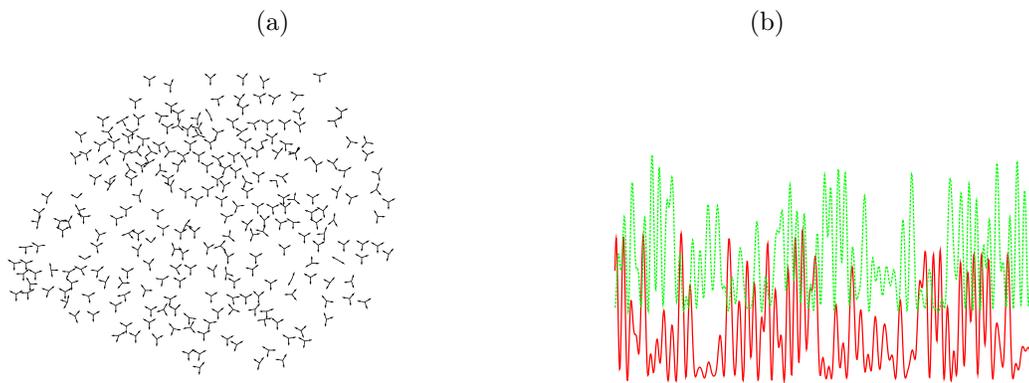


FIGURE 1.3 – Autres sources d'aléa : (a) positionnement d'antennes, (b) propagation de signaux.

### 1.3 Principe de modélisation

La modélisation consiste de manière générale à représenter un système réel complexe par une forme mathématique plus simple, permettant de mieux comprendre son fonctionnement et d'en calculer certaines grandeurs. Tout l'art consiste à faire les bonnes hypothèses, pour ne retenir que ce qui compte, le *cœur* du système. Dans notre cas, il s'agit de garder tout ce qui a trait au partage dynamique des ressources, sur des échelles de temps typiquement supérieures au temps de transmission d'un paquet (disons 100 ms, pour donner un ordre de grandeur). Nous négligerons donc les phénomènes de niveau *paquet* (accès au medium, propagation, algorithmes de contrôle de congestion) pour nous concentrer sur les phénomènes de niveau *flot*, sous certaines hypothèses de partage des ressources entre ces flots.

Concrètement, chaque flot de données sera représenté par un fluide s'écoulant à un certain débit variant instantanément à chaque arrivée ou départ d'un autre flot, avec une valeur maximale fonction de la ligne d'accès de l'utilisateur. Les flots sont générés selon un certain processus stochastique (typiquement Poisson) et quittent le réseau une fois que leur volume (également aléatoire) est écoulé. La durée des flots dépend donc du débit reçu, et par suite de l'état de congestion du système. Le trafic est dit *élastique*<sup>3</sup>, ce qui est une différence fondamentale avec la téléphonie : on verra que les résultats de performance sont très différents de ceux obtenus à partir de la formule d'Erlang.

3. Certains flots ne sont pas élastiques dans l'Internet : c'est le cas de la téléphonie ou la transmission audio ou vidéo en *streaming* par exemple. Sous certaines hypothèses de partage des ressources, on peut néanmoins montrer que le modèle considéré où tout le trafic est élastique est un pire cas [29].

Le modèle se résume donc, en plus des caractéristiques statistiques du trafic, par une politique de partage des ressources entre les flots en cours. Dans le cas d'un lien unique, et pour des flots de même débit crête, une hypothèse naturelle est que le partage est parfaitement *équitable*. Cette hypothèse, qui est loin d'être déraisonnable [1], donne des résultats de performance insensibles, qui sont à ce titre les extensions naturelles de la formule d'Erlang aux réseaux de données.

Lorsque les flots ont des débits crête différents, ou des routes distinctes dans le réseau, la notion de partage « équitable » devient ambiguë. Les modes de partage les plus couramment utilisés sont issus des sciences économiques et sociales : ce sont par exemple les notions d'équité max-min [3] ou d'équité proportionnelle [52]. Il s'avère que, pour obtenir des résultats insensibles, la bonne notion d'équité est l'équité dite *équilibrée*, qui ne coïncide avec l'équité max-min ou l'équité proportionnelle que dans certains cas particuliers [27]. Malgré leurs différences, nous verrons que ces modes de partage donnent des résultats de performance très proches, l'avantage clé de l'équité équilibrée étant de conduire à des formules explicites. Au passage, la similitude des résultats obtenus relativise les débats sans fin qui animent la communauté scientifique sur la « bonne » notion d'équité, débats généralement issus de l'analyse de systèmes statiques et perdant tout sens en dynamique, avec arrivées et départs de flots. L'aléa bat les cartes, et, comme souvent, nous simplifie la tâche.

## 1.4 Structure du mémoire

Le mémoire est organisé comme illustré par la FIG. 1.4. Le chapitre 2 se focalise sur un lien unique partagé par des flots de même débit crête ; c'est le cas homogène, qui généralise la formule d'Erlang aux réseaux de données. Les deux chapitres 3 et 4 sont indépendants : le premier traite du cas où les utilisateurs ont des débits crête différents, le second du cas où plusieurs liens sont partagés simultanément ; dans les deux cas, on supposera le partage conforme à l'équité équilibrée. On me pardonnera j'espère la présentation monotone de ces trois chapitres, qui permet d'avancer pas à pas vers des modèles très généraux, esquissés au chapitre 5. Le chapitre 6 conclut le mémoire.

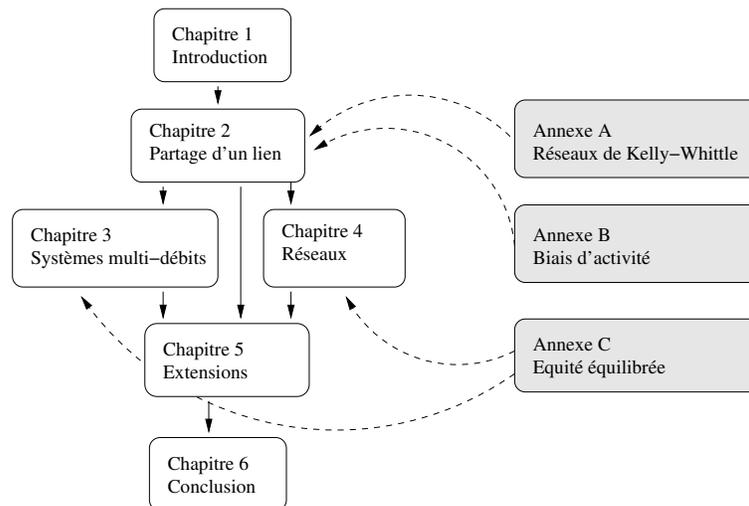


FIGURE 1.4 – Dépendance des chapitres et annexes du mémoire.

Des notes bibliographiques accompagnent la fin de chacun des chapitres 2 à 5. La plupart des résultats sont illustrés par des courbes, sous une forme utile à l'ingénieur : charge maximale à ne pas dépasser en fonction de la capacité pour un critère de performance donné. Enfin, les formules données dans les chapitres 2 et 3 sont implémentées dans des outils disponibles sur :

<http://www.telecom-paristech.fr/~bonald/hdr>.

## 1.5 Résumé des contributions

Comme ce mémoire vise à présenter l'ensemble de mes travaux depuis ma thèse de doctorat, j'en fais ici un court résumé par thème de recherche. Le mémoire est axé sur les trois premiers thèmes.

**Modèles de trafic.** Nous montrons dans [6] et [35, 1] pour les réseaux à commutation de circuits et les réseaux de données, respectivement, que les propriétés usuelles d'insensibilité, liées à la distribution de la taille des requêtes (durée d'appel, volume de données), s'étendent au processus d'arrivée des requêtes lorsque celles-ci sont générées les unes après les autres au sein de sessions utilisateurs. Les modèles sont donc encore plus robustes que ce que l'on pense généralement. Ces résultats mettent par ailleurs en lumière le continuum qui existe entre modèles de type Engset (avec un nombre fini de sessions) et modèles de type Erlang (avec arrivées de sessions selon un processus de Poisson).

**Équité équilibrée.** L'équité équilibrée est introduite dans [27]. Nous montrons notamment qu'elle ne coïncide pas avec les modes de partage usuels, sauf dans deux cas très particuliers : un lien unique avec le même débit crête pour tous les flots, et un hypercube homogène, pour l'équité proportionnelle et en l'absence de débit crête. Nous donnons dans [42] une méthode de calcul pour les réseaux en arbre, et dans [41] une formule récursive pour les systèmes multi-débits, qui sera présentée au chapitre 3. Des approximations et bornes sur le débit moyen sont données dans [7, 25, 28]. Les résultats sont présentés dans un contexte plus général, où la région de capacité est un polytope convexe ou un ensemble convexe quelconque, dans [8] et [20], respectivement.

**Qualité de service.** Un résultat important donné en annexe B est que, pour le calcul de la distribution du débit instantané obtenu par un utilisateur, il convient de pondérer la distribution stationnaire de l'état du système par le nombre de flots en cours [39]. En effet, le point de vue des utilisateurs est biaisé par leur présence dans le système. La méthode de calcul du taux de perte introduite au chapitre 2 est donnée dans [10]. La relation très simple qui lie le taux de perte au débit moyen est nouvelle, de même que l'approximation du débit moyen qui en résulte dans un réseau (voir chapitres 2 à 4). D'autres résultats sur la qualité de service concernent le calcul du délai d'attente dans les routeurs par des modèles de niveau paquet [32, 21] et la proposition de gestion du trafic par flot dans le réseau [23].

**Dimensionnement.** Dans [22] et [33], nous appliquons les modèles de trafic élastique au dimensionnement des réseaux fixes et mobiles, respectivement. Nous considérons le trafic non-élastique (voix, streaming) dans [29], et montrons que, pourvu que ces flots subissent le même sort que les flots élastiques (et donc s'adaptent à la congestion), ce trafic peut être considéré comme élastique pour le dimensionnement : l'approximation est conservative. Par ailleurs, nous montrons dans [38] que l'hypothèse usuelle d'homogénéité des sources dans un modèle de type Engset est également conservative, ce qui étend aux réseaux de données un résultat montré par Dartois pour les réseaux téléphoniques [43].

**Files d'attente.** Une contribution significative en théorie des files d'attente a été de prouver que les réseaux de Kelly-Whittle sont les seuls réseaux insensibles, sous la discipline de service *processeur partagé* et avec routage aléatoire de clients [26]. Ce résultat est notamment utilisé pour montrer que l'équité équilibrée est le seul mode de partage insensible et efficace (c'est-à-dire utilisant au mieux les ressources), ce qui était d'ailleurs la première motivation pour l'étude de cette classe de réseaux de files d'attente. Nous présentons dans [40] une autre classe de réseaux ayant la propriété d'insensibilité, avec discipline de service symétrique et mélange aléatoire de clients à chaque mouvement dans le réseau. Enfin, nous donnons dans [30] des bornes pour des réseaux possédant une certaine propriété de monotonie ; ce résultat est utilisé dans le mémoire (voir l'annexe B).

**Stabilité.** De nombreuses questions liées à l'efficacité du partage des ressources d'un réseau se réduisent à une analyse de stabilité. Nous avons montré à ce titre qu'il est généralement efficace de partager les ressources de manière équitable; *a contrario*, le traitement prioritaire de certaines classes de service empêche la pleine utilisation des ressources [18]. En cas d'instabilité, c'est le comportement des utilisateurs face à la congestion qui permet de réguler le système et d'atteindre un certain équilibre [37]. Dans [14], nous étudions la perte d'efficacité liée à un abandon du contrôle de congestion, et les mécanismes à mettre en œuvre dans le réseau pour limiter cette perte.

**Réseaux sans fil.** Nous proposons dans [33] un modèle de niveau flot pour les réseaux HDR et HSDPA<sup>4</sup>, incluant l'aléa lié à la position des mobiles et à la propagation du signal radio. Les impacts respectifs de la mobilité et des interférences sont abordés dans [13, 34] et [11, 12, 31]. La capacité optimale d'un réseau cellulaire, combinant analyse de stabilité et théorie de l'information, est donnée dans [34]. Le cas spécifique des réseaux WLAN, incluant l'accès aléatoire au médium, est analysé dans [15, 16].

**Algorithmique.** Un mécanisme d'accès radio opportuniste, le *score-based scheduler*, est proposé et analysé dans [4, 5]. Une politique de routage dynamique préservant l'insensibilité du système est étudiée dans [17]. Nous analysons dans [36] l'impact de divers algorithmes d'ordonnancement de paquets sur la performance des réseaux fixes. Enfin, nous considérons dans [19] diverses stratégies d'échange d'information entre pairs dans le cadre d'une diffusion d'un flux temps-réel en pair-à-pair, et proposons dans [24] un nouvel algorithme d'accès au médium pour les anneaux optiques à commutation par paquet.

## 1.6 Notations

Pour faciliter la lecture du mémoire, j'utiliserai les notations suivantes pour tous vecteurs  $a, b$  de dimension  $N$  :

$$a^b = a_1^{b_1} \dots a_N^{b_N}, \quad ab = (a_1 b_1, \dots, a_N b_N), \quad a! = a_1! \dots a_N!, \quad \binom{a}{b} = \binom{a_1}{b_1} \dots \binom{a_N}{b_N}.$$

Par ailleurs, je noterai  $|a|$  la somme des composantes de  $a$ ,  $a \leq b$  pour l'inégalité par composante,  $e_1, \dots, e_N$  les vecteurs unités et  $e$  leur somme. J'emploierai le signe  $\mathbb{I}$  pour la fonction indicatrice. Enfin, j'utiliserai la même notation  $x$  pour la variable aléatoire et ses valeurs, ce qui ne prête pas à confusion dans le texte.

---

<sup>4</sup>. High Data Rate et High-Speed Downlink Packet Access, respectivement, standards CDMA2000 et UMTS des réseaux radio 3G.

# Chapitre 2

## Partage d'un lien

Ce chapitre est consacré au modèle de partage d'un lien unique par des utilisateurs. C'est l'équivalent du modèle d'Erlang utilisé en téléphonie, le blocage des appels étant remplacé par le partage des ressources en cas de congestion.

### 2.1 Modèle

On considère un lien de capacité  $C$  bit/s, comme illustré par la FIG. 2.1. Un certain nombre d'utilisateurs sont connectés à Internet via ce lien, dit lien de *collecte*, et génèrent des flots de données de façon aléatoire. On suppose que ces flots arrivent selon un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ ; leur volume suit une loi exponentielle de paramètre  $\mu$ . L'intensité de trafic est donnée par le produit  $\alpha = \lambda/\mu$  du taux d'arrivée des flots par leur volume moyen, exprimé en bit/s. La *charge* du lien est le rapport  $\rho = \alpha/C$  de l'intensité de trafic sur la capacité, grandeur sans dimension.

Dans ce chapitre, nous supposons que tous les flots ont le même débit crête (le cas de différents débits crête est traité dans le chapitre suivant). Ce débit crête commun est typiquement fonction de la ligne d'accès des utilisateurs. Nous le prendrons comme unité de débit, de sorte que l'intensité de trafic  $\alpha$  s'exprime de manière équivalente en Erlangs : c'est le produit du taux d'arrivée des flots par leur durée moyenne, calculée au débit crête. En notant  $x$  le nombre de flots en cours, chaque flot a son débit crête tant que  $x \leq C$ ; il y a congestion dès que  $x > C$  : les flots se partagent alors le lien de manière équitable, chacun recevant le même débit  $C/x$ . Dans toute la suite, nous prendrons  $C$  entier pour simplifier.

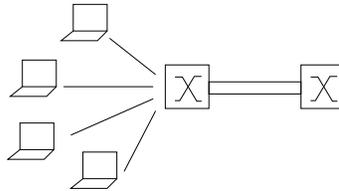


FIGURE 2.1 – Partage d'un lien de collecte.

Le nombre de flots en cours est un processus de naissance et de mort, avec taux de naissance  $\lambda$  et taux de mort  $x\mu$  si  $x \leq C$ ,  $C\mu$  sinon. On en déduit sa mesure invariante :

$$\pi(x) = \pi(0) \frac{\alpha^x}{x!} \text{ pour } x = 0, 1, \dots, C \quad \text{et} \quad \pi(x) = \rho\pi(x-1) \text{ pour } x > C. \quad (2.1)$$

Le processus est stable si et seulement si  $\rho < 1$ , ce que nous supposons par la suite. Nous noterons  $\pi$  sa *loi stationnaire* (donc après normalisation).

L'hypothèse des arrivées de flots Poisson correspond au cas d'un grand nombre d'utilisateurs connectés, chacun émettant une succession de flots bien espacés dans le temps. En fait, tous les résultats présentés dans ce chapitre et dans les chapitres 3 et 4 restent valables pour un espacement quelconque entre flots successifs générés par un même utilisateur ; il suffit que les « sessions » associées, suites de flots générés par un même utilisateur, arrivent selon un processus de Poisson. Les caractéristiques statistiques de ces sessions sont quelconques ; en particulier, le nombre de flots par session, les volumes des flots et les durées des périodes d'inactivité entre deux flots sont des variables aléatoires arbitraires, éventuellement corrélées, de moyennes finies. Seule compte l'intensité de trafic totale générée, donnée par le paramètre  $\alpha$ .

L'hypothèse des arrivées Poisson de sessions est valable dès que le trafic de chaque utilisateur est relativement faible par rapport au trafic total. Nous analyserons au chapitre 5 l'impact d'un faible nombre d'utilisateurs générant la majorité du trafic ; nous verrons que le trafic est typiquement moins volatil dans ce cas, ce qui tend à améliorer la performance, à charge comparable. En fait, l'hypothèse la plus forte est que chaque utilisateur génère ses flots en série et non en parallèle. La présence de flots simultanés émis par un même utilisateur peut se modéliser par des sessions parallèles, la ligne d'accès devenant le premier point d'agrégation du trafic. C'est le modèle de réseau présenté au chapitre 4 qui s'applique alors ; nous verrons que chaque lien a en fait tendance à lisser le trafic, de sorte que l'agrégation de trafic opérée par la ligne d'accès améliore la performance au niveau du lien de collecte.

## 2.2 Taux de blocage

On considère tout d'abord le modèle d'Erlang, en l'absence de partage élastique. Lorsque  $x = C$ , les flots arrivant sont bloqués et perdus. La distribution stationnaire du nombre de flots correspond à la mesure invariante  $\pi$  tronquée à l'espace d'états  $\{0, 1, \dots, C\}$ , soit :

$$\pi(x) = \pi(0) \frac{\alpha^x}{x!} \text{ pour } x = 0, 1, \dots, C.$$

Le système est toujours stable. Le taux de blocage est donné par  $\pi(C)$ , soit :

$$B = \frac{\frac{\alpha^C}{C!}}{1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \dots + \frac{\alpha^C}{C!}}. \quad (2.2)$$

C'est la formule d'Erlang, dont la propriété d'« économie d'échelle » est illustrée par la FIG. 2.2(a) : pour un taux de blocage fixé, la charge maximale croît en fonction de la capacité. Il est donc toujours plus efficace de mettre les ressources en commun et de les partager. Cette propriété est satisfaite par toutes les métriques de performance présentées ci-dessous : taux de congestion, taux d'insatisfaction, débit moyen et taux de perte.

## 2.3 Taux de congestion

On considère maintenant l'impact du partage élastique des ressources. On s'intéresse tout d'abord au taux de congestion, correspondant à la fraction du temps pendant laquelle  $x > C$ , de sorte que le lien limite le débit des flots. Nous noterons ce taux :

$$G = \sum_{x>C} \pi(x).$$

D'après (2.1), on peut exprimer le taux de congestion en fonction de la formule d'Erlang (2.2) :

$$G = \frac{\rho B}{1 - \rho + \rho B}. \quad (2.3)$$

On note que  $G/\rho$  correspond à la formule d'Erlang à attente (c'est la probabilité que  $x \geq C$ ).

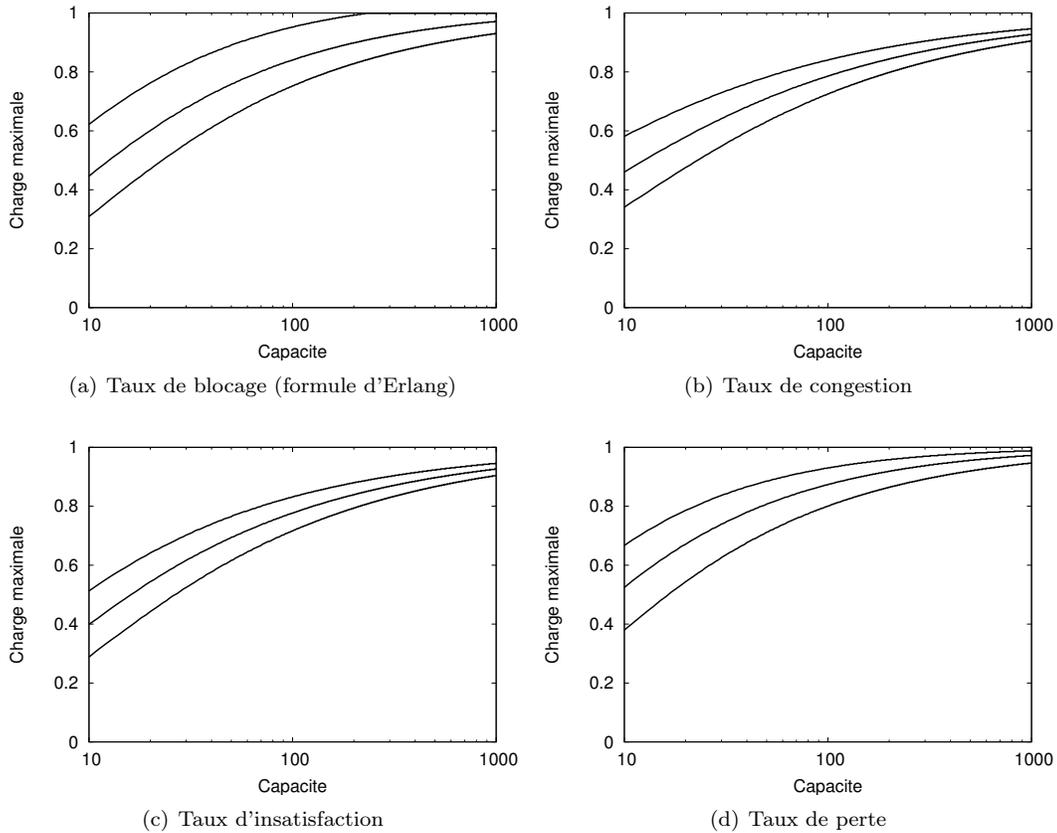


FIGURE 2.2 – Charge maximale en fonction de la capacité pour diverses métriques de performance, fixées à 5%, 1% et 0,1% (courbes de haut en bas).

## 2.4 Taux d'insatisfaction

Le taux de congestion *vu des utilisateurs* est biaisé par leur activité. Schématiquement, il y a plus d'utilisateurs actifs en période de congestion, ce qui augmente le poids de ces périodes de congestion. Plus précisément, la loi stationnaire du nombre de flots vu par les utilisateurs actifs est proportionnelle à  $x\pi(x)$ , comme expliqué en annexe B. On en déduit le *taux d'insatisfaction* suivant, correspondant à la fraction du temps (vue des utilisateurs) pendant laquelle les flots ont un débit strictement inférieur au débit crête :

$$U = \frac{\sum_{x>C} x\pi(x)}{\sum_x x\pi(x)} = \frac{E(x\mathbb{I}(x > C))}{E(x)}. \quad (2.4)$$

Or, on a d'après (2.1) et (2.3),

$$E(x) = \rho C + \frac{G}{1-\rho},$$

et en utilisant la loi de conservation (voir annexe A),

$$E(x\mathbb{I}(x \leq C)) = (\rho - G)C.$$

On en déduit l'expression :

$$U = 1 - \frac{(\rho - G)C}{\rho C + \frac{G}{1-\rho}}. \quad (2.5)$$

## 2.5 Débit moyen

Plus généralement, on peut calculer la *distribution* du débit des flots vue des utilisateurs (et non seulement la probabilité que celui-ci soit strictement inférieur au débit crête). Ce débit étant égal à  $\min(C/x, 1)$  en présence de  $x$  flots, on en déduit en particulier le débit moyen :

$$D = \frac{\sum_{x \geq 1} \min(\frac{C}{x}, 1) x \pi(x)}{\sum_x x \pi(x)} = \frac{E(\min(x, C))}{E(x)}. \quad (2.6)$$

En utilisant l'équation de conservation (voir annexe A), on obtient l'expression suivante :

$$D = \frac{\rho C}{E(x)} = \frac{\rho C}{\rho C + \frac{G}{1-\rho}}. \quad (2.7)$$

En particulier, d'après la formule de Little, le débit moyen s'interprète comme le rapport du volume moyen des flots par leur durée moyenne.

## 2.6 Taux de perte

Le calcul du taux de perte est plus délicat du fait que le modèle masque les phénomènes microscopiques ayant lieu au niveau paquet. Une méthode simple consiste à supposer que les flots sont au débit crête *en entrée* du lien (en pratique, les algorithmes de contrôle de congestion adaptent le débit des flots pour limiter les pertes de paquets). Sous cette hypothèse conservative, le trafic offert au lien est égal à  $x$  en présence de  $x$  flots. On en déduit le taux de perte :

$$L = \frac{\sum_{x > C} (x - C) \pi(x)}{\sum_x x \pi(x)} = \frac{E((x - C) \mathbb{I}(x > C))}{E(x)}. \quad (2.8)$$

On remarque d'après (2.6) que :

$$L = 1 - D. \quad (2.9)$$

## 2.7 Comparaison des métriques

On vérifie facilement que  $L, G \leq U$ , ce qui fait du taux d'insatisfaction la métrique la plus restrictive. On a par ailleurs  $L \leq G$  dans la plupart des cas pratiques (il suffit que  $\rho(1 - \rho)C \geq 1$ ), ce qui fait du taux de perte la métrique la moins restrictive en général. On note, au vu de la FIG. 2.2, que la formule d'Erlang  $B$  n'est une bonne approximation pour aucune des trois métriques  $L, G, U$ , ce qui montre l'importance de la modélisation du partage élastique de la capacité pour le dimensionnement des réseaux de données.

## 2.8 Notes bibliographiques

Les premiers modèles de partage « élastique » de ressources remontent à Kleinrock, qui s'intéressait à la performance des processeurs multi-tâches, partagés en temps [55]. Ces modèles sont appliqués aux réseaux sans fil par Telatar et Gallager [66] et Stamatelos et Koukoulidis [65], puis aux réseaux filaires par Heyman, Lakshman et Neidhardt [47] et Massoulié et Roberts [61]. Berger et Kogan en déduisent des règles de dimensionnement pratiques pour les réseaux d'accès [2]. Alors que la propriété d'insensibilité de ces modèles à la loi de la taille des requêtes était bien connue, nous avons étendu cette propriété en tenant compte des « sessions » utilisateur dans [35, 1] pour les réseaux de données et dans [6] pour les réseaux téléphoniques, en utilisant les résultats de Kelly et Whittle [50, 64]. De nombreux articles se focalisent sur l'adaptation de ces modèles au partage réalisé par TCP, ainsi que sur les métriques de performance associées, voir par exemple Kumar [54]. Nous avons souligné dans [39] l'importance du biais lié à l'activité des utilisateurs. La méthode de calcul du taux de perte est présentée dans [10].

# Chapitre 3

## Systemes multi-débits

On considère dans ce chapitre le cas de différents débits crête. Toujours par analogie avec la téléphonie, ce modèle est l'équivalent du modèle d'Erlang *multi-débits*, introduit par Gimpelson en 1965 et utilisé notamment dans les années 1980 pour dimensionner les réseaux numériques à intégration de services (RNIS).

### 3.1 Modèle

On considère toujours un lien de capacité  $C$  bit/s. Il y a maintenant  $N$  classes d'utilisateurs, chacune caractérisée par un certain débit crête. Pour tout  $i = 1, \dots, N$ , on note  $c_i$  le débit crête de la classe  $i$ ,  $c$  le vecteur associé. Les flots de classe  $i$  arrivent selon un processus de Poisson d'intensité  $\lambda_i$ ; leur volume suit une loi exponentielle de paramètre  $\mu_i$ . On note  $\alpha_i = \lambda_i / (\mu_i c_i)$  l'intensité de trafic en Erlangs, et  $\alpha$  le vecteur associé. La charge du lien due à la classe  $i$  et la charge totale du lien sont données respectivement par  $\rho_i = \alpha_i c_i / C$  et  $\rho = \alpha \cdot c / C$ .

Soit  $x_i$  le nombre de flots de classe  $i$  en cours; on note  $x$  le vecteur associé. Chaque flot a son débit crête tant que  $x \cdot c \leq C$ ; il y a congestion dès que  $x \cdot c > C$ : les flots se partagent alors le lien selon l'équité *équilibrée* présentée en annexe C. On note  $\phi_i(x)$  le débit total de la classe  $i$  dans l'état  $x$ , et  $\phi(x)$  le vecteur associé. On supposera que la capacité  $C$  et les débits crête  $c_1, \dots, c_N$  sont des multiples entiers d'une unité de débit arbitraire.

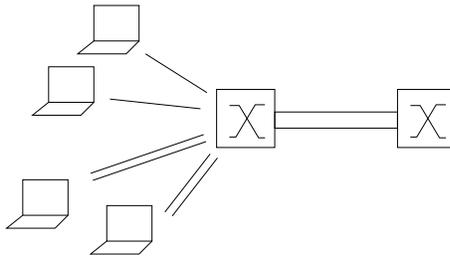


FIGURE 3.1 – Système multi-débits.

Le vecteur  $x$  définit un processus de naissance et de mort en dimension  $N$ , avec taux de naissance  $\lambda_i$  et taux de mort  $\mu_i \phi_i(x)$  pour la classe  $i$ . Sa mesure invariante est donnée par<sup>1</sup> :

$$\pi(x) = \pi(0) \frac{\alpha^x}{x!} \text{ si } x \cdot c \leq C, \quad \pi(x) = \sum_{i=1}^N \rho_i \pi(x - e_i) \text{ sinon.} \tag{3.1}$$

1. Voir le chapitre 1 pour les conventions de notation.

Le processus est stable si et seulement si  $\rho < 1$ , ce que nous supposons par la suite. Sauf mention contraire, nous noterons  $\pi$  sa loi stationnaire.

## 3.2 Taux de blocage

Comme au chapitre 2, on considère tout d'abord le modèle d'Erlang multi-débits, en l'absence de partage élastique. Les flots ne sont donc acceptés que si leur débit crête peut être garanti. La distribution stationnaire du nombre de flots s'obtient à nouveau par troncation :

$$\pi(x) = \pi(0) \frac{\alpha^x}{x!} \text{ pour } x.c \leq C.$$

Le système est toujours stable. Le taux de blocage de la classe  $i$  est donné par :

$$B_i = \sum_{x:C-c_i < x.c \leq C} \pi(x). \quad (3.2)$$

On en déduit le taux de blocage moyen par flot :

$$B = \sum_{i=1}^N a_i B_i,$$

où  $a_i$  est la probabilité qu'un flot arrivant soit de classe  $i$ . Si les flots ont la même taille moyenne quelle que soit la classe, cette probabilité est proportionnelle à l'intensité de trafic  $\alpha_i$ . La FIG. 3.2(a) illustre le résultat obtenu pour  $N = 3$  classes, avec  $c = (1, 2, 10)$  et une répartition de charge égale à 60%, 30%, 10% entre les classes 1, 2, 3.

**Formule récursive.** Le calcul des taux de blocage (3.2) à partir de la loi stationnaire (3.1) est exponentiel en  $N$  et peut s'avérer très lourd dès que  $N \geq 3$ . Pour rendre le calcul linéaire en  $N$ , il suffit de calculer les niveaux d'occupation du lien. On note, pour  $\pi(0) = 1$ , le poids relatif de l'état d'occupation  $n$  :

$$f(n) = \sum_{x:x.c=n} \pi(x).$$

On vérifie alors à partir de (3.1) que :

$$f(n) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i c_i}{n} f(n - c_i) \text{ pour } n = 1, \dots, C, \quad (3.3)$$

avec  $f(0) = 1$  et  $f(n) = 0$  pour tout  $n < 0$ . En calculant :

$$f_i^- = \sum_{C-c_i < n \leq C} f(n), \quad f^- = \sum_{n \leq C} f(n),$$

on en déduit les taux de blocage :

$$B_i = \frac{f_i^-}{f^-}.$$

Comme nous allons le voir, toutes les métriques de performance présentées au chapitre 2 (taux de congestion, taux d'insatisfaction, débit moyen et taux de perte) se déduisent peu ou prou de la même formule récursive.

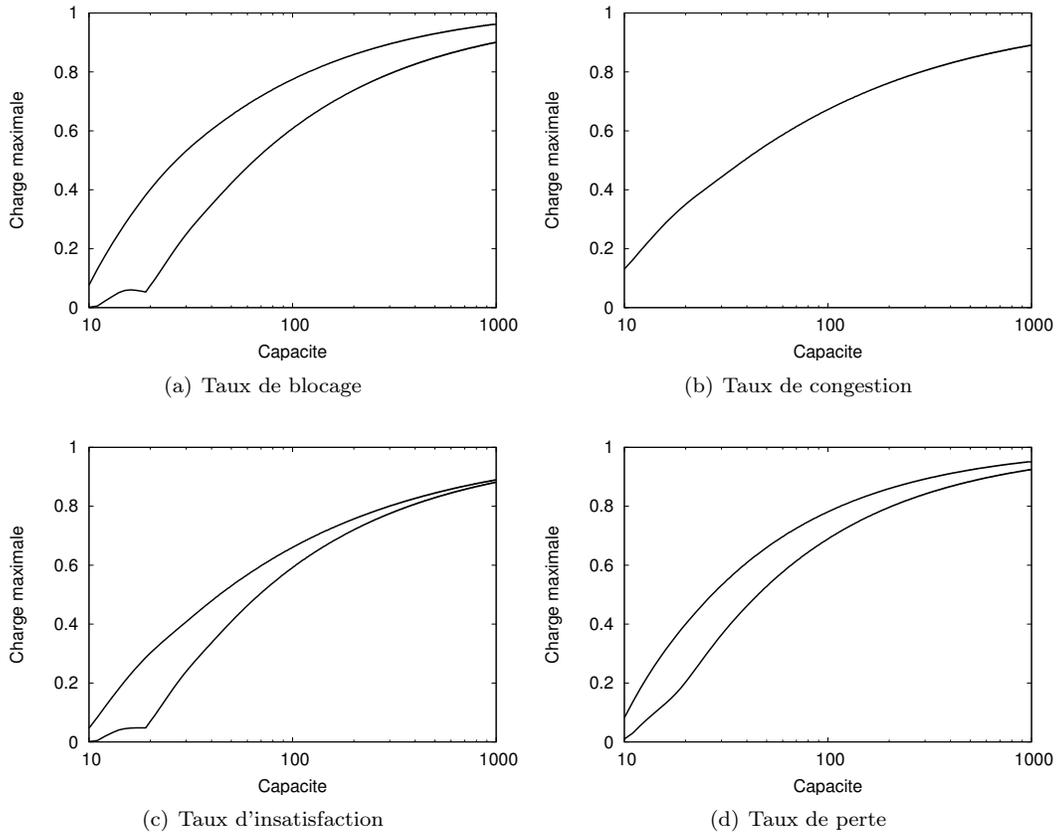


FIGURE 3.2 – Charge maximale en fonction de la capacité pour divers critères de performance, moyens (courbes du haut) et absolus<sup>1</sup> (courbes du bas), tous fixés à 1%, avec  $c = (1, 2, 10)$ .

### 3.3 Taux de congestion

On considère maintenant l'impact du partage élastique de la capacité. Le taux de congestion, défini comme la fraction du temps où le lien limite le débit des flots, est donné par :

$$G = \sum_{x: x.c > C} \pi(x).$$

La formule récursive (3.3) s'applique, et en notant :

$$f^+ = \sum_{n > C} f(n),$$

on vérifie à partir de (3.1) que :

$$f^+ = \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i f_i^-}{1 - \rho}.$$

On en déduit :

$$G = \frac{f^+}{f^- + f^+}.$$

1. C'est-à-dire satisfaits pour toutes les classes, et en particulier la classe 3, qui a les taux de blocage, taux d'insatisfaction et taux de perte les plus élevés ; le taux de congestion est indépendant de la classe.

### 3.4 Taux d'insatisfaction

Le taux de congestion vu des utilisateurs dépend de leur classe. Plus spécifiquement, la loi stationnaire du nombre de flots vu par un utilisateur de classe  $i$  actif est proportionnelle à  $x_i\pi(x)$ , tandis que la loi stationnaire du nombre de flots vu par un utilisateur actif quelconque est proportionnelle à  $|x|\pi(x)$  (voir annexe B). On en déduit comme au chapitre 2 les taux d'insatisfaction respectifs :

$$U_i = \frac{\sum_{x: x.c > C} x_i \pi(x)}{\sum_x x_i \pi(x)} = \frac{\mathbb{E}(x_i \mathbb{I}(x.c > C))}{\mathbb{E}(x_i)} \quad \text{et} \quad U = \frac{\sum_{x: x.c > C} |x| \pi(x)}{\sum_x |x| \pi(x)} = \frac{\mathbb{E}(|x| \mathbb{I}(x.c > C))}{\mathbb{E}(|x|)}.$$

On remarque que :

$$U = \sum_{i=1}^N p_i U_i, \quad (3.4)$$

où  $p_i$  est la probabilité qu'un flot actif soit de classe  $i$  :

$$p_i = \frac{\mathbb{E}(x_i)}{\mathbb{E}(|x|)}.$$

Par ailleurs, ces lois stationnaires biaisées par l'activité des utilisateurs permettent de calculer les distributions de débit vues des utilisateurs de chaque classe. Comme dans le cas mono-classe, la moyenne de chacune de ces distributions correspond au débit moyen usuel de la classe associée, défini comme le rapport de la taille moyenne des flots par leur durée moyenne.

**Formule réursive.** Le calcul des taux d'insatisfaction se fait également à partir de la formule réursive (3.3). On définit pour cela le poids relatif de l'état d'occupation  $n$  associé à la distribution vue d'un utilisateur de classe  $i$  actif, toujours pour  $\pi(0) = 1$  :

$$g_i(n) = \sum_{x: x.c=n} x_i \pi(x).$$

En utilisant l'équation d'équilibre local  $x_i \pi(x) = \alpha_i \pi(x - e_i)$  pour tout état  $x$  tel que  $x.c \leq C$ , on obtient  $g_i(n) = \alpha_i f(n - c_i)$  pour tout  $n \leq C$ . En notant  $g_i^-$  et  $g_i^+$  les sommes de  $g_i(n)$  pour  $n \leq C$  et  $n > C$ , respectivement, on a :

$$U_i = \frac{g_i^+}{g_i^- + g_i^+} \quad \text{et} \quad U = \frac{\sum_{i=1}^N g_i^+}{\sum_{i=1}^N (g_i^- + g_i^+)},$$

avec :

$$g_i^+ = \rho_i \frac{f_i^- + f_i^+}{1 - \rho} + \sum_{j=1}^N \frac{\rho_j g_{ij}^-}{1 - \rho}, \quad g_{ij}^- = \sum_{C - c_j < n \leq C} g_i(n).$$

### 3.5 Débit moyen

Les débits moyens d'un utilisateur de classe  $i$  et d'un utilisateur quelconque sont donnés respectivement par :

$$D_i = \frac{\sum_x \phi_i(x) \pi(x)}{\sum_x x_i \pi(x)} = \frac{\mathbb{E}(\phi_i(x))}{\mathbb{E}(x_i)} \quad \text{et} \quad D = \frac{\sum_x |\phi(x)| \pi(x)}{\sum_x |x| \pi(x)} = \frac{\mathbb{E}(|\phi(x)|)}{\mathbb{E}(|x|)}.$$

Ces débits moyens sont liés par la relation :

$$D = \sum_{i=1}^N p_i D_i.$$

Par ailleurs, on a par la loi de conservation (voir annexe A) :

$$D_i = \frac{\rho_i C}{\mathbb{E}(x_i)} \quad \text{et} \quad D = \frac{\rho C}{\mathbb{E}(|x|)}.$$

Ces expressions se calculent à partir de la formule récursive :

$$D_i = \rho_i C \frac{f^- + f^+}{g_i^- + g_i^+} \quad \text{et} \quad D = \rho C \frac{f^- + f^+}{\sum_{i=1}^N (g_i^- + g_i^+)}.$$

### 3.6 Taux de perte

En appliquant la même méthode qu'au chapitre 2, on obtient les taux de perte des utilisateurs de classe  $i$  et le taux de perte global :

$$L_i = \frac{\sum_x (x_i c_i - \phi_i(x)) \pi(x)}{\sum_x x_i c_i \pi(x)} = \frac{\mathbb{E}(x_i c_i - \phi_i(x))}{\mathbb{E}(x_i c_i)}$$

et

$$L = \frac{\sum_x (x.c - |\phi(x)|) \pi(x)}{\sum_x x.c \pi(x)} = \frac{\mathbb{E}(x.c - |\phi(x)|)}{\mathbb{E}(x.c)}. \quad (3.5)$$

On remarque que :

$$L = \sum_{i=1}^N q_i L_i, \quad (3.6)$$

où  $q_i$  est la probabilité que le paquet d'un flot actif *en entrée du lien* (donc en supposant que ce flot est au débit crête) soit de classe  $i$  :

$$q_i = \frac{\mathbb{E}(x_i c_i)}{\mathbb{E}(x.c)}.$$

Par ailleurs, les taux de perte sont liés aux débits moyens par les relations :

$$L_i = 1 - \frac{D_i}{c_i} \quad \text{et} \quad L = 1 - \frac{D}{\bar{c}}, \quad (3.7)$$

où  $\bar{c}$  est le débit crête moyen d'un flot actif, soit :

$$\bar{c} = \frac{\mathbb{E}(x.c)}{\mathbb{E}(|x|)}.$$

**Formule récursive.** D'après (3.7), le taux de perte d'un utilisateur de classe  $i$  se déduit de la formule récursive associée au débit moyen. Pour le taux de perte global, on déduit de (3.5) et de l'équation de conservation l'expression :

$$L = 1 - \frac{\rho C}{\mathbb{E}(x.c)}.$$

On note alors, toujours avec  $\pi(0) = 1$  :

$$h(n) = \sum_{x: x.c=n} x.c \pi(x) = n f(n).$$

Soient  $h^-$  et  $h^+$  les sommes de  $h(n)$  pour  $n \leq C$  et  $n > C$ , respectivement. On obtient :

$$L = 1 - \rho C \frac{f^- + f^+}{h^- + h^+},$$

avec :

$$h^+ = \sum_{i=1}^N \rho_i c_i \frac{f_i^- + f^+}{1 - \rho} + \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i h_i^-}{1 - \rho}, \quad h_i^- = \sum_{C - c_i < n \leq C} h(n).$$

### 3.7 Comparaison des métriques

Il découle de la monotonie du système, au sens défini en annexe B, que le taux de congestion est toujours pire vu d'un utilisateur actif, soit  $G \leq U$  et  $G \leq U_i$ . On a par ailleurs  $L_i \leq U_i$ . Le taux de perte global  $L$  et le taux d'insatisfaction global  $U$  ne satisfont pas une telle inégalité, ceux-ci étant, d'après (3.4) et (3.6), les moyennes pondérées respectives des taux de perte  $L_i$  et des taux d'insatisfaction  $U_i$  avec des poids différents.

La FIG. 3.3 illustre les charges maximales obtenues avec les différentes métriques. On observe que le taux d'insatisfaction est bien la métrique la plus restrictive, et que le taux de blocage utilisé en général est une métrique bien différente des trois autres. On remarque également que ces résultats sont très proches de ceux obtenus par simulation avec l'équité max-min ou l'équité proportionnelle (ces deux modes de partage coïncident pour les systèmes multi-débits) ; les métriques sont calculées sur la base de  $10^7$  arrivées de flots, après une période initiale de  $10^4$  arrivées.

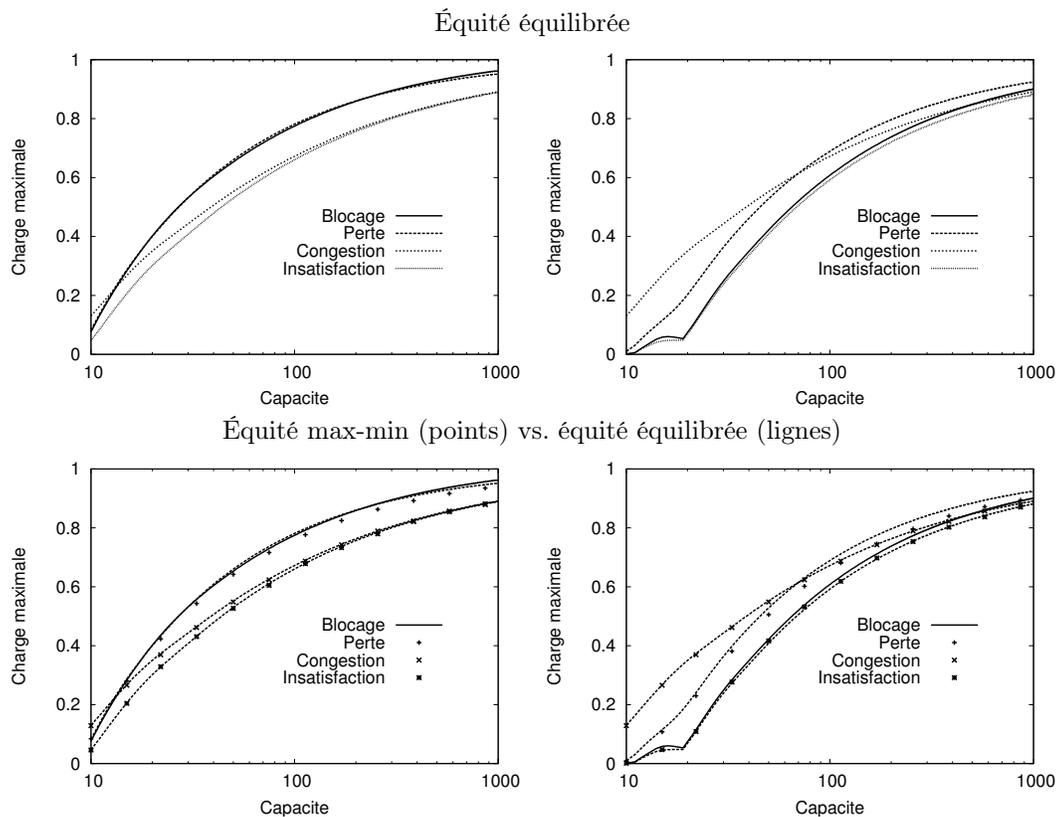


FIGURE 3.3 – Charge maximale en fonction de la capacité pour différents critères de performance, moyens (à gauche) et absolus (à droite), tous fixés à 1%, avec  $c = (1, 2, 10)$ .

### 3.8 Notes bibliographiques

Le modèle d'Erlang multi-débits est introduit par Gimpelson [46]. Une première version de la formule récursive est donnée par Fortet et Grandjean [45] ; sa forme la plus générale est publiée indépendamment par Kaufman [49] et Roberts [60]. Stamatelos et Koukoulidis sont les premiers à utiliser un modèle multi-débits avec partage élastique, ce partage étant limité par un contrôle d'admission [65] ; nous introduisons dans [27] le modèle multi-débits avec partage élastique complet, tel que présenté dans le chapitre. La formule récursive associée est décrite dans [41] pour le débit moyen, dans [10] pour le taux de perte.

# Chapitre 4

## Réseaux

Ce chapitre est dédié aux « vrais » réseaux, c'est-à-dire à l'influence simultanée de plusieurs liens sur la performance. Si des formules existent pour chacune des métriques de performance considérées dans les deux derniers chapitres, leur calcul s'avère bien souvent infaisable dès que le réseau contient plus de deux ou trois liens. L'objectif de ce chapitre est de présenter les résultats généraux et de tester sur un exemple simple la validité de l'approximation usuelle consistant à considérer l'impact de chaque lien séparément.

### 4.1 Modèle

On considère un réseau constitué de  $J$  liens, comme illustré par la FIG. 4.1. On note  $C_j$  la capacité du lien  $j$  en bit/s, et  $C$  le vecteur associé. Il y a  $N$  classes de flots, chaque classe  $i$  étant caractérisée par une route  $r_i$  dans le réseau constituée d'un sous-ensemble des liens. On note  $A$  la matrice d'incidence associée, avec  $A_{ij} = \mathbb{I}(j \in r_i)$ . On suppose pour simplifier que tous les flots ont le même débit crête, pris comme unité de débit (le cas multi-débits est traité dans le chapitre suivant). Les flots de classe  $i$  arrivent selon un processus de Poisson d'intensité  $\lambda_i$  ; leur volume suit une loi exponentielle de paramètre  $\mu_i$ . On note  $\alpha_i = \lambda_i/\mu_i$  l'intensité de trafic de la classe  $i$  en Erlangs, et  $\alpha$  le vecteur associé. La charge du lien  $j$  est donnée par :

$$\rho_j = \frac{\sum_{i: j \in r_i} \alpha_i}{C_j} = \frac{(\alpha A)_j}{C_j}. \quad (4.1)$$

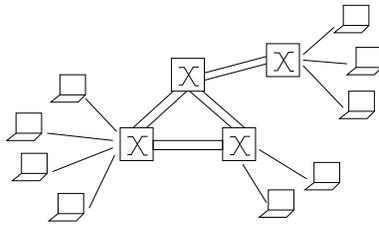


FIGURE 4.1 – Un réseau de  $J = 4$  liens.

Soit  $x_i$  le nombre de classe  $i$  en cours ; on note  $x$  le vecteur associé. Chaque flot a son débit crête tant que  $xA \leq C$  ; il y a congestion sur au moins un lien dès que  $xA > C$  : les flots se partagent alors la capacité du ou des liens en congestion selon l'équité *équilibrée*. Plus spécifiquement, le débit total de la classe  $i$  dans l'état  $x$  est donné par :

$$\forall x : x_i > 0, \quad \phi_i(x) = \frac{\Phi(x - e_i)}{\Phi(x)},$$

où  $\Phi(x)$  est la *fonction d'équilibre* :

$$\Phi(x) = \frac{1}{x!} \quad \text{si } xA \leq C, \quad \Phi(x) = \max_j \frac{1}{C_j} \sum_{i=1}^N A_{ij} \Phi(x - e_i) \quad \text{sinon.} \quad (4.2)$$

C'est le seul partage qui assure la réversibilité du processus  $x$  et la saturation d'au moins un lien du réseau dans tout état  $x$  tel que  $xA > C$ , au sens où :

$$\exists j \in \{1, \dots, J\} : \sum_{i=1}^N A_{ij} \phi_i(x) = C_j.$$

Le vecteur  $x$  définit un processus de naissance et de mort en dimension  $N$ , avec taux de naissance  $\lambda_i$  et taux de mort  $\mu_i \phi_i(x)$  pour la classe  $i$ . Sa mesure invariante est donnée par :

$$\pi(x) = \pi(0) \Phi(x) \alpha^x,$$

soit

$$\pi(x) = \pi(0) \frac{\alpha^x}{x!} \quad \text{si } xA \leq C, \quad \pi(x) = \rho_j \sum_{i=1}^N A_{ij} \pi(x - e_i) \quad \text{sinon,} \quad (4.3)$$

pour tout  $j$  qui satisfait le maximum dans l'expression de la fonction d'équilibre (4.2). Le processus est stable si et seulement si  $\rho_j < 1$  pour tout  $j$ , ce que nous supposons par la suite. Nous noterons  $\pi$  sa loi stationnaire.

## 4.2 Taux de blocage

En l'absence de partage élastique, on obtient le modèle classique du réseau téléphonique. La distribution stationnaire du nombre de flots s'obtient par troncation :

$$\pi(x) = \pi(0) \frac{\alpha^x}{x!} \quad \text{pour } xA \leq C.$$

Le système est toujours stable. Le taux de blocage de la classe  $i$  est donné par :

$$B_i = \sum_{xA \leq C, (x+e_i)A \not\leq C} \pi(x). \quad (4.4)$$

Cette expression n'est hélas calculable que pour des réseaux de petite taille. La plupart du temps, on a donc recours à l'approximation suivante :

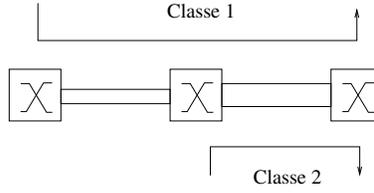
$$\tilde{B}_i = 1 - \prod_{j \in r_i} (1 - b_j), \quad (4.5)$$

où  $b_j$  est la formule d'Erlang (2.2) associée au lien  $j$ , c'est-à-dire pour  $C_j$  circuits et  $(\alpha A)_j$  Erlangs. Ceci revient à considérer l'impact de chaque lien séparément, en supposant l'indépendance des événements de blocage. Il s'avère que cette approximation de découplage est *conservative* au sens où elle surestime le taux de blocage.

Les résultats obtenus sont illustrés par les FIG. 4.3 et 4.4 pour les classes 1 et 2, respectivement, du réseau de la FIG. 4.2. Ce réseau de deux liens est caractérisé par le vecteur de capacité  $C \propto (1, 2)$  (dans tout le chapitre, la capacité sur l'axe des abscisses correspond à celle du lien 1) et la matrice d'incidence :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'intensité de trafic est la même pour les deux classes. Les valeurs exactes obtenues à partir de l'expression exacte du taux de blocage (et des autres métriques de performance) sont calculées jusqu'à la limite permise par un programme C avec des variables de type double, soit une capacité inférieure à 750. Les expressions approchées se calculent pour toute valeur de capacité. On observe que l'approximation est excellente pour chaque métrique de performance. Elle semble également constituer une borne, tout au moins pour cet exemple.

FIGURE 4.2 – Un réseau de  $J = 2$  liens et  $N = 2$  classes.

### 4.3 Taux de congestion

On considère maintenant l'impact du partage élastique des liens. Le taux de congestion associé à la classe  $i$  correspond à la fraction du temps pendant laquelle les flots de classe  $i$  n'ont pas leur débit crête, soit :

$$G_i = \sum_{x: x_i > 0, \phi_i(x) < x_i} \pi(x). \quad (4.6)$$

L'approximation correspondante est donnée par :

$$\tilde{G}_i = 1 - \prod_{j \in r_i} (1 - g_j),$$

où  $g_j$  désigne le taux de congestion du lien  $j$ , soit d'après (2.3) :

$$g_j = \frac{\rho_j b_j}{1 - \rho_j + \rho_j b_j}.$$

Pour calculer la valeur exacte des expressions (4.6) pour le réseau de la FIG. 4.2, on introduit les quantités :

$$f^- = \sum_{x_1 \leq C_1, x_1 + x_2 \leq C_2} \pi(x), \quad f_1^+ = \sum_{x_1 > C_1, x_1 + x_2 \leq C_2} \pi(x), \quad f_2^+ = \sum_{x_1 + x_2 > C_2, x_2 > C_2 - C_1} \pi(x).$$

On a d'après (4.3) :

$$f_1^+ = \frac{\alpha_1 f_1}{C_1 - \alpha_1}, \quad f_2^+ = \frac{\alpha_1 (f_2 - f) + \alpha_2 (f_2 + g)}{C_2 - \alpha_1 - \alpha_2},$$

avec

$$f = \pi(C_1, C_2 - C_1), \quad g = \frac{\alpha_1 f}{C_1 - \alpha_1}.$$

Les taux de congestion sont donnés par :

$$G_1 = \frac{f_1^+ + f_2^+}{f^- + f_1^+ + f_2^+} \quad \text{et} \quad G_2 = \frac{f_2^+}{f^- + f_1^+ + f_2^+}.$$

Des expressions similaires, non reproduites dans ce mémoire, existent pour les taux d'insatisfaction et les taux de perte, ainsi que pour des topologies de réseau plus générales.

### 4.4 Taux d'insatisfaction

Le taux d'insatisfaction de la classe  $i$  (taux de congestion vu des utilisateurs) est donné par :

$$U_i = \frac{\sum_{x: \phi_i(x) < x_i} x_i \pi(x)}{\sum_x x_i \pi(x)} = \frac{\mathbb{E}(x_i \mathbb{I}(\phi_i(x) < x_i))}{\mathbb{E}(x_i)}.$$

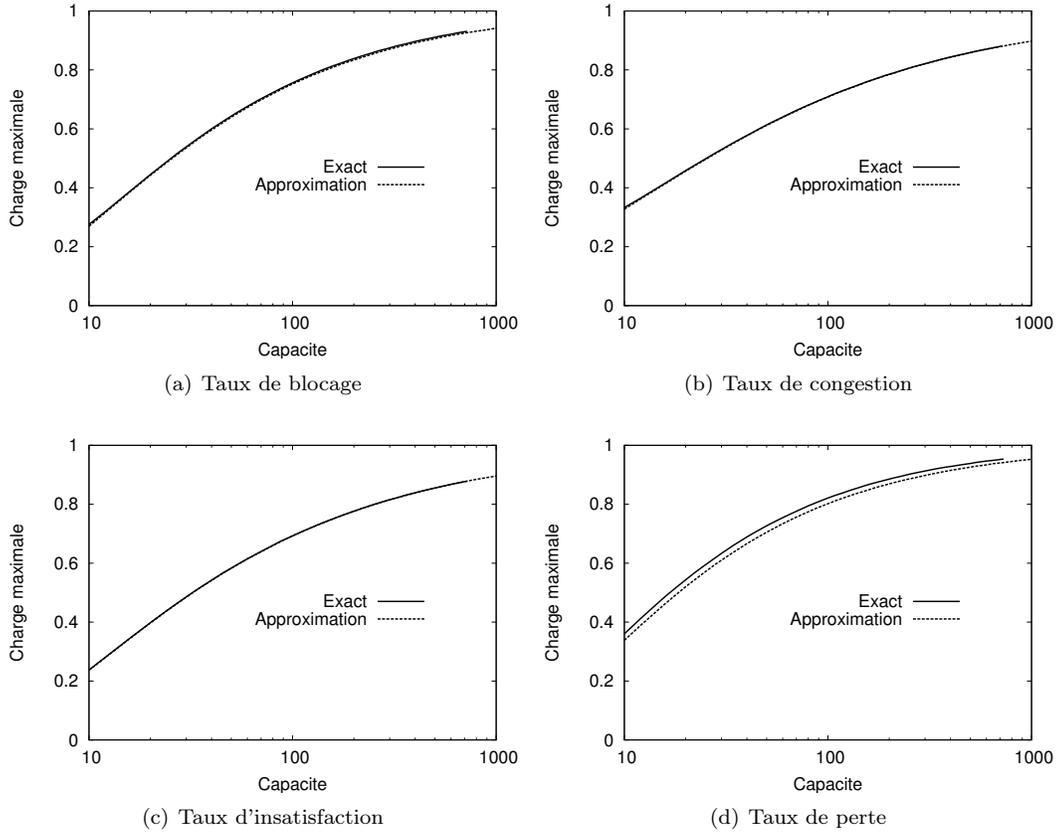


FIGURE 4.3 – Charge maximale en fonction de la capacité pour divers critères de performance de la classe 1, tous fixés à 1%.

L'approximation associée est :

$$\tilde{U}_i = 1 - \prod_{j \in r_i} (1 - u_j),$$

où  $u_j$  désigne le taux d'insatisfaction au niveau du lien  $j$ , soit d'après (2.4) :

$$u_j = 1 - \frac{(\rho_j - g_j)C_j}{\rho_j C_j + \frac{g_j}{1 - \rho_j}}.$$

## 4.5 Débit moyen

De la même manière, le débit moyen d'un utilisateur de classe  $i$  est donné par :

$$D_i = \frac{\sum_x \phi_i(x) \pi(x)}{\sum_x x_i \pi(x)} = \frac{\mathbf{E}(\phi_i(x))}{\mathbf{E}(x_i)},$$

soit d'après la loi de conservation :

$$D_i = \frac{\alpha_i}{\mathbf{E}(x_i)}.$$

L'approximation se déduit de celle associée au taux de perte, comme décrit ci-dessous.

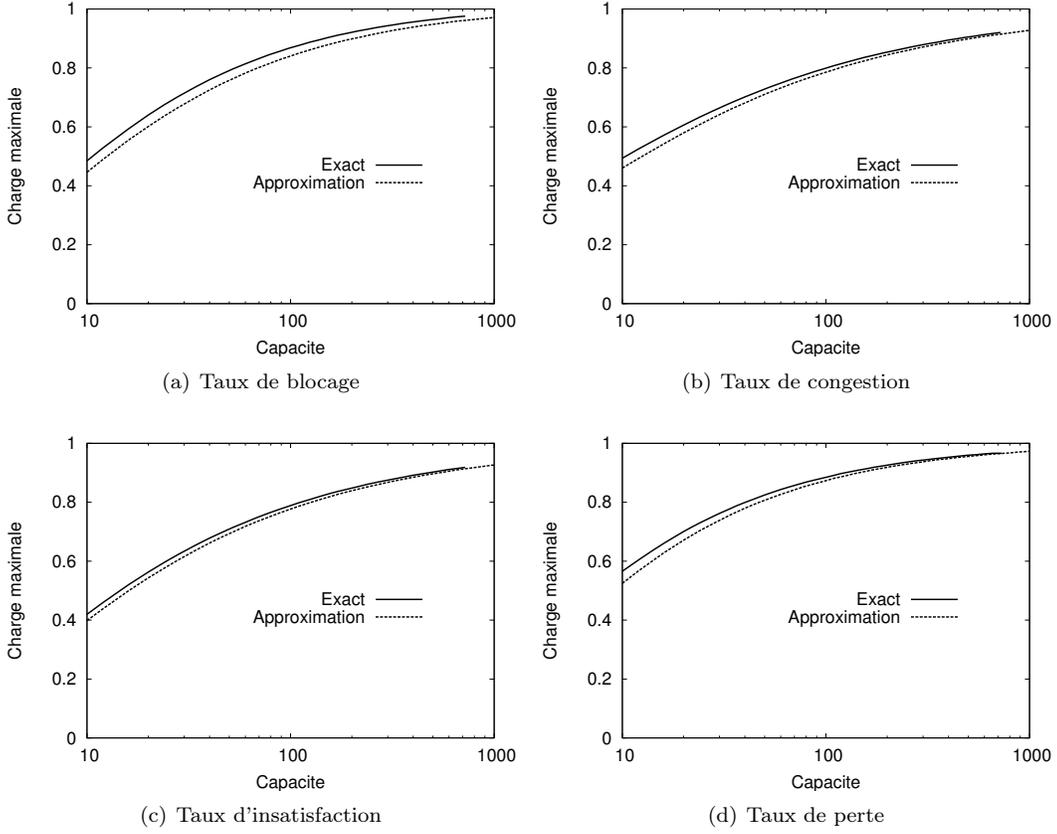


FIGURE 4.4 – Charge maximale en fonction de la capacité pour divers critères de performance de la classe 2, tous fixés à 1%.

## 4.6 Taux de perte

On calcule le taux de perte d'un utilisateur de la classe  $i$  comme suit :

$$L_i = \frac{\sum_x (x_i - \phi_i(x))\pi(x)}{\sum_x x_i \pi(x)} = \frac{E(x_i - \phi_i(x))}{E(x_i)} = 1 - \frac{\alpha_i}{E(x_i)},$$

soit

$$L_i = 1 - D_i. \quad (4.7)$$

L'approximation s'écrit :

$$\tilde{L}_i = 1 - \prod_{j \in r_i} (1 - l_j),$$

où  $l_j$  désigne le taux de perte sur le lien  $j$ , soit d'après (2.7) et (2.8) :

$$l_j = \frac{g_j}{g_j + \rho_j(1 - \rho_j)C_j}.$$

Pour le débit moyen, on obtient d'après (4.7) :

$$\tilde{D}_i = 1 - \tilde{L}_i = \prod_{j \in r_i} d_j \quad \text{avec} \quad d_j = \frac{\rho_j C_j}{\rho_j C_j + \frac{g_j}{1 - \rho_j}}.$$

## 4.7 Comparaison des métriques

Si le système est monotone au sens défini en annexe B, ce qui est le cas du réseau de la FIG. 4.2, le taux de congestion est toujours pire vu d'un utilisateur actif, soit  $G_i \leq U_i$ . Par ailleurs, on a toujours  $L_i \leq U_i$ . Enfin, les inégalités correspondantes  $\tilde{G}_i \leq \tilde{U}_i$  et  $\tilde{L}_i \leq \tilde{U}_i$  se déduisent de celles vérifiées pour un lien unique, telles que décrites au chapitre 2; on a  $\tilde{L}_i \leq \tilde{G}_i$  dans la plupart des cas pratiques, de sorte que le taux de perte est le plus souvent la métrique la moins restrictive tandis que le taux d'insatisfaction est toujours la métrique la plus restrictive.

Ces résultats sont illustrés par la FIG. 4.5, pour la classe 1 du réseau de la FIG. 4.2. La FIG. 4.6 montre les résultats obtenus par simulation avec l'équité max-min ou l'équité proportionnelle (là encore, les modes de partage coïncident), dans les mêmes conditions qu'au §3.7; à nouveau, l'équité équilibrée fournit une très bonne approximation de la performance obtenue avec ces modes de partage.

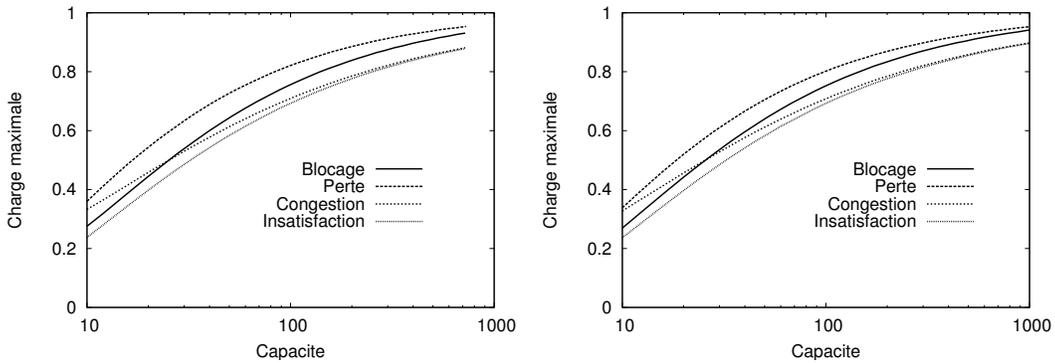


FIGURE 4.5 – Charge maximale en fonction de la capacité pour divers critères de performance de la classe 1, tous fixés à 1% (valeur exacte à gauche et approximation à droite).

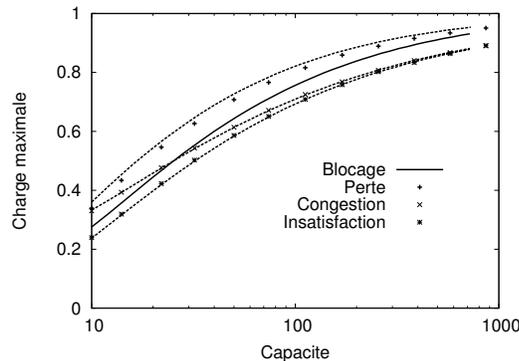


FIGURE 4.6 – Comparaison des résultats obtenus (lignes) avec l'équité max-min (points).

## 4.8 Notes bibliographiques

Les modèles de réseaux téléphoniques sont exposés dans l'article de Kelly [51] et le livre de Ross [62]. Whitt montre dans [67] que l'approximation du taux de blocage obtenue en considérant l'effet de chaque lien séparément constitue une borne. Nous introduisons dans [27] le modèle de réseau avec partage selon l'équité équilibrée. Une méthode de calcul de la constante de normalisation et des métriques de performance qui en découlent est donnée dans [42] pour certaines topologies de réseaux; les articles [7, 25, 28] donnent des bornes et approximations pour le calcul du débit moyen.

# Chapitre 5

## Extensions

Dans ce chapitre, nous donnons quelques pistes pour l'extension des modèles présentés dans les chapitres précédents. Celles-ci concernent aussi bien la structure du trafic que le contrôle d'admission, le routage et le cas spécifique des réseaux sans fil.

### 5.1 Flots permanents

On s'intéresse tout d'abord à l'impact du transfert de gros fichiers, dont la durée dépasse l'échelle de temps sur laquelle on effectue les calculs de performance. On reprend donc le modèle du chapitre 2, avec en plus des flots *transitoires* arrivant selon un processus de Poisson,  $k$  flots *permanents*, de même débit crête unitaire et partageant la capacité du lien  $C$  de manière équitable avec les autres flots.

On vérifie facilement que la distribution du nombre de flots transitoires  $x$  est donnée par <sup>1</sup> :

$$\pi(x) = \pi(0) \frac{\alpha^x}{x!} \text{ pour } x = 0, 1, \dots, C - k \quad \text{et} \quad \pi(x) = \pi(x - 1) \rho \frac{x + k}{x} \text{ pour } x > C - k.$$

La condition de stabilité reste  $\rho < 1$ , où  $\rho$  est la charge due aux flots transitoires. La charge réelle, définie comme le rapport de l'intensité du trafic effectivement écoulé sur la capacité, est donnée par :

$$\rho' = \frac{1}{C} \sum_x \pi(x) \min(x + k, C).$$

Cette charge est comprise entre  $\rho$  et 1, et est égale à 1 si et seulement si  $k \geq C$ . La fraction du trafic dû aux flots permanents est donnée par :

$$\theta = \frac{\rho' - \rho}{\rho'}.$$

Le taux de congestion du lien est donné par :

$$G = \sum_{x:x+k>C} \pi(x).$$

C'est également le taux d'insatisfaction pour les flots permanents. Pour les flots transitoires, le taux d'insatisfaction s'écrit :

$$U = \frac{\sum_{x:x+k>C} x\pi(x)}{\sum_x x\pi(x)} = \frac{\mathbb{E}(x \mathbb{I}(x + k > C))}{\mathbb{E}(x)}.$$

---

1. Cette distribution diffère de la distribution originale (2.1) conditionnée par la présence de  $k$  flots, la différence étant que l'on *sait* que les flots sont là depuis toujours.

Enfin, les taux de perte pour les flots transitoires et pour les flots permanents sont donnés respectivement par :

$$L = 1 - \frac{\rho C}{E(x)} \quad \text{et} \quad L' = 1 - \frac{(\rho' - \rho)C}{k},$$

dont on déduit le taux de perte global :

$$pL + (1 - p)L' = 1 - \frac{\rho' C}{E(k + x)},$$

où  $p$  est la probabilité qu'un flot actif soit transitoire :

$$p = \frac{E(x)}{E(k + x)}.$$

La FIG. 5.1 montre l'impact de la fraction de trafic permanent  $\theta$  sur la charge réelle maximale pour un taux de perte global de 1% (tant que la précision du programme C le permet). Pour ce faire, on calcule pour chacune des valeurs de  $C$  et  $\theta$  le nombre de flots permanents  $k$  permettant de se rapprocher au plus près de la fraction de trafic permanent cible,  $\theta$ . On constate que la présence de trafic permanent augmente la charge maximale, ce qui s'explique par le fait que le trafic est plus « lisse », moins aléatoire. Sans connaissance précise de la proportion de trafic permanent, il est donc toujours possible de dimensionner en le négligeant : l'hypothèse est conservatrice.

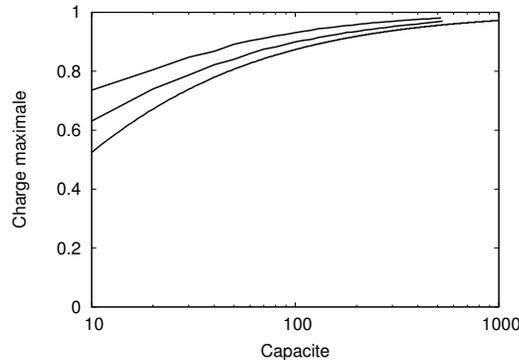


FIGURE 5.1 – Charge maximale en fonction de la capacité pour un taux de perte de 1% et 0%, 20%, 50% de trafic permanent (de bas en haut).

## 5.2 Sessions permanentes

On suppose maintenant que le trafic consiste en  $k$  sessions permanentes, avec  $k \geq C$ . Chaque session est une succession de flots séparés par des périodes d'inactivité. Le volume de chaque flot suit une loi exponentielle de paramètre  $\mu$  ; la durée de chaque période d'inactivité suit une loi exponentielle de paramètre  $\nu$ . Comme pour le modèle initial présenté au chapitre 2, ces hypothèses sont là uniquement pour rendre le processus markovien ; les résultats restent valables pour des lois quelconques, avec d'éventuelles corrélations. Par contre, il est important que toutes les sessions aient les mêmes caractéristiques statistiques. Le cas de sessions hétérogènes est évoqué en fin de section.

En l'absence de limitation due à la capacité du lien, chaque session génère un trafic égal à  $\nu/(\nu + \mu)$  Erlangs. On définit donc l'intensité du trafic offert par :

$$\alpha = \frac{k\nu}{\nu + \mu}.$$

La charge du lien est le rapport de l'intensité de trafic sur la capacité, soit  $\rho = \alpha/C$ .

On note  $x$  le nombre de flots en cours. En l'absence de partage élastique du lien, le nombre de flots est limité à  $C$  et la distribution de  $x$  est donnée par :

$$\pi(x) = \pi(0) \binom{k}{x} \beta^x \text{ pour } x = 0, 1, \dots, C.$$

avec  $\beta = \nu/\mu$ . On obtient le taux de blocage :

$$B = \frac{(k-C)\pi(C)}{k\pi(0) + (k-1)\pi(1) + \dots + (k-C)\pi(C)}.$$

C'est la formule d'Engset utilisée en téléphonie.

Avec partage élastique, la distribution devient :

$$\pi(x) = \pi(0) \binom{k}{x} \beta^x \text{ pour } x = 0, 1, \dots, C \text{ et } \pi(x) = \pi(x-1) \beta \frac{k-x+1}{C} \text{ sinon.}$$

Ce système est toujours stable. La charge réelle, correspondant au trafic effectivement écoulé, est donnée par :

$$\rho' = \frac{1}{C} \sum_x \pi(x) \min(x, C).$$

Cette charge est inférieure ou égale à  $\rho$ , la congestion diminuant l'intensité d'arrivée des flots. Les métriques de performance se calculent comme au chapitre 1. La FIG. 5.2 donne la charge réelle maximale pour un taux de perte global de 1%, avec un rapport  $k/C$  égal à 2, 5 et l'infini, ce dernier cas correspondant au modèle initial avec arrivées Poisson (pour les deux autres cas, on donne les résultats tant que la précision du programme C le permet). Comme précédemment, la présence de sessions permanentes augmente la charge maximale, ce qui s'explique par le fait que le trafic devient moins aléatoire.

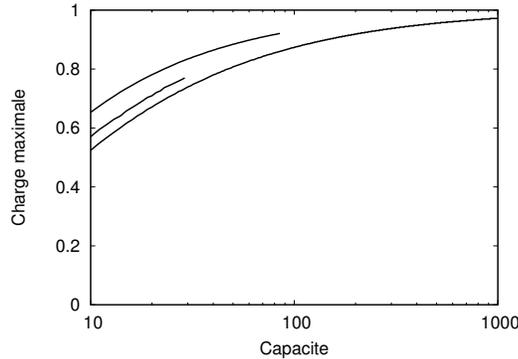


FIGURE 5.2 – Charge maximale en fonction de la capacité pour un taux de perte de 1% et un facteur  $k/C$  égal à 2, 5 et l'infini (de haut en bas).

En présence de  $N$  types de sessions, caractérisés par les vecteurs  $k$  et  $\beta$ , la distribution stationnaire du nombre de flots en cours de chaque type devient :

$$\pi(x) = \pi(0) \binom{k}{x} \beta^x \text{ pour } |x| \leq C \text{ et } \pi(x) = \pi(x - e_i) \beta_i \frac{k_i - x_i + 1}{C} \text{ sinon.}$$

Le cas particulier de  $N = 2$  types de sessions, avec  $k_1 \rightarrow \infty$ ,  $k_1 \beta_1 \rightarrow \alpha$ , et  $\beta_2 \rightarrow \infty$  correspond au cas considéré au §5.1, avec  $k_2$  flots permanents.

### 5.3 Réseaux et multi-débits

On suppose désormais que les flots arrivent selon un processus de Poisson, comme dans les chapitres 2 à 4. On considère un réseau tel que décrit dans le chapitre 4, mais où chaque classe  $i$  est caractérisée, en plus de sa route  $r_i$ , par un débit crête  $c_i$ . On note toujours  $\alpha_i$  l'intensité de trafic de la classe  $i$  en Erlangs, au débit crête  $c_i$ . La distribution stationnaire est toujours donnée par l'expression (4.3), l'inégalité  $xA \leq C$  étant remplacée par  $xcA \leq C$  et la charge du lien  $j$  étant définie par :

$$\rho_j = \frac{\sum_{i:j \in r_i} \alpha_i c_i}{C_j} = \frac{(\alpha c A)_j}{C_j}.$$

La condition de stabilité reste  $\rho_j < 1$  pour tout  $j$ . Les métriques de performance et leurs approximations se calculent de la même manière, ces dernières se déduisant des formules récursives exposées au chapitre 3. Une différence notable par rapport au cas mono-débit est que l'approximation du taux de blocage n'est généralement pas une borne.

### 5.4 Contrôle d'admission

Dans tous les modèles introduits jusqu'alors, on peut introduire un contrôle d'admission de manière à garantir un débit minimum par exemple. Comme le processus de Markov est réversible, la nouvelle distribution stationnaire s'obtient par troncation. Pour le modèle du chapitre 2 par exemple, le distribution stationnaire devient pour un débit minimum garanti  $d \leq 1$  :

$$\pi(x) = \pi(0) \frac{\alpha^x}{x!} \text{ pour } x = 0, 1, \dots, C \quad \text{et} \quad \pi(x) = \rho \pi(x-1) \text{ pour } x = C+1, \dots, k,$$

où  $k$  est le nombre maximum tel que  $kd \leq C$ . Le taux de blocage est donné par  $\pi(k)$ , qui correspond à la formule d'Erlang si et seulement si  $d = 1$ . Les autres métriques de performance se calculent de manière similaire au cas sans blocage exposé au chapitre 2.

### 5.5 Routage dynamique

Certains systèmes offrent la possibilité d'orienter les flots vers les ressources disponibles. On considère par exemple le cas de  $J$  liens en parallèle ; le lien  $j$  est de capacité  $C_j$  et admet au plus  $k_j$  flots simultanés, ce qui garantit un débit minimum de  $C_j/k_j$  sur ce lien. On suppose toujours que les flots ont un débit crête unitaire ; on note  $\alpha$  l'intensité de trafic associée en Erlangs.

Soit  $x$  le vecteur du nombre de flots en cours sur chaque lien. Dans l'état  $x$ , un nouveau flot est routé vers le lien  $j$  avec probabilité :

$$p_j(x) = \frac{k_j - x_j}{|k - x|}. \quad (5.1)$$

On vérifie que le processus  $x$  est réversible, de distribution stationnaire :

$$\pi(x) = \pi(0) \frac{\binom{|k-x|}{k-x}}{\binom{|k|}{k}} \Phi(x) \alpha^{|x|},$$

où  $\Phi$  est la fonction d'équilibre, donnée par :

$$\Phi(x) = \prod_{j=1}^J \Phi_j(x_j),$$

avec

$$\Phi_j(x_j) = \frac{1}{x_j!} \text{ pour } x_j = 0, 1, \dots, C_j \quad \text{et} \quad \Phi_j(x_j) = \frac{1}{C_j} \Phi_j(x_j - 1) \text{ pour } x_j = C_j + 1, \dots, k_j.$$

On calcule alors les différentes métriques de performance comme au chapitre 2. Par exemple, le taux de blocage est donné par  $\pi(C)$  et le taux de perte par :

$$L = 1 - \frac{\alpha}{E(|x|)}.$$

La FIG. 5.3 donne la charge maximale obtenue pour  $J = 2$  liens de même capacité en fonction de la capacité totale  $C_1 + C_2$ , pour un débit minimum égal à  $1/2$  et un taux de perte cible de 1%. Ces résultats sont comparés avec ceux obtenus d'une part pour un système virtuel de capacité  $C_1 + C_2$  partagée entre tous les flots, d'autre part avec un routage statique où chaque flot est dirigé vers chaque lien avec la même probabilité, indépendamment de l'état du système. On constate que le routage dynamique considéré est relativement proche de l'optimum. En fait, la performance dépend beaucoup du débit minimum choisi : lorsque celui-ci tend vers 0, les probabilités de routage (5.1) sont quasiment constantes sur une grande partie de l'espace d'états, et tout se passe comme si le routage était statique.

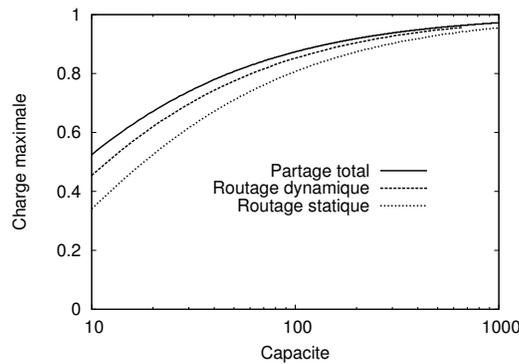


FIGURE 5.3 – Impact du routage dynamique sur la charge maximale (taux de perte cible de 1%).

## 5.6 Routage multi-chemins

Pour répartir au mieux la charge sur différentes ressources, l'idéal est de permettre certains utilisateurs de profiter de plusieurs ressources simultanément. Dans un réseau, cela se traduit par l'utilisation de plusieurs routes simultanées, *via* un aiguillage des paquets sur ces routes multiples.

Mathématiquement, cela se traduit par un changement des contraintes de capacité. L'équité équilibrée telle que définie en annexe C se généralise aisément, en imposant qu'au moins une contrainte est atteinte dans chaque état. Pour le cas simple de deux liens de capacité  $C_1$  et  $C_2$ , les utilisateurs de classe 1, 2, 3 pouvant utiliser le lien 1, le lien 2 et les liens 1 et 2, respectivement, ces contraintes s'écrivent (en plus des contraintes de débit crête qui sont inchangées) :

$$\phi_1(x) \leq C_1, \quad \phi_2(x) \leq C_2, \quad \phi_1(x) + \phi_2(x) + \phi_3(x) \leq C_1 + C_2.$$

En particulier, ce réseau est équivalent à un réseau de 3 liens, avec l'ajout d'un lien virtuel de capacité  $C_1 + C_2$  limitant le débit des utilisateurs de classe 3. Les résultats sont illustrés par la FIG. 5.4, en utilisant l'approximation décrite au chapitre 4, toujours pour des liens de même capacité et un taux de perte cible de 1%, mais sans contrôle d'admission ; la classe 3 représente 50% du trafic et chacune des deux autres 25% du trafic. Le routage multi-chemins donne des résultats très proches de l'optimum.

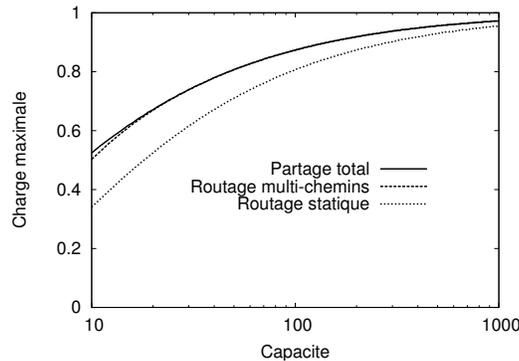


FIGURE 5.4 – Impact du routage multi-chemins sur la charge maximale (taux de perte cible de 1%).

## 5.7 Réseaux sans fil

Les réseaux sans fil posent des problèmes spécifiques de modélisation liés aux phénomènes de propagation radio et à la mobilité des utilisateurs. Nous montrons ici simplement comment prendre en compte la diversité spatiale des conditions radio, en négligeant leurs variations temporelles. Ainsi deux utilisateurs connectés à la même station de base mais en deux points différents de la cellule nécessitent des quantités de ressources radio différentes pour transmettre le même volume d'information, que celles-ci s'expriment en termes de bande de fréquence, de puissance ou d'unité de temps par exemple. Nous considérons un modèle générique constitué de  $J$  ressources et  $N$  classes d'utilisateurs, chaque classe correspondant à une zone homogène de conditions radio dans le réseau et à un certain type de mobile. On note  $C_j$  la capacité de la ressource  $j$ . Un utilisateur de classe  $i$  nécessite une quantité de la ressource  $j$  égale à  $A_{ij}$  par unité de débit (jusqu'à présent, cette quantité valait 1 ou 0 selon que l'utilisateur empruntait ou non le lien  $j$ ). On suppose de plus que chaque classe  $i$  est caractérisée par un certain débit crête  $c_i$  par utilisateur.

Le modèle est donc identique à celui décrit au §5.3, mais avec une matrice  $A$  quelconque. En particulier, l'allocation réalisée par l'équité équilibrée et la distribution stationnaire associée s'en déduisent de la même manière. Dans le cas particulier d'une unique ressource, comme un canal radio partagé en temps, le réseau équivaut à un système multi-débits tel que décrit au chapitre 3. Il suffit en effet de renormaliser le débit de chaque classe par la quantité de ressource requise par unité de débit, donnée par la matrice  $A$ ; en d'autres termes, on remplace le service à fournir à chaque utilisateur, initialement exprimé sous forme d'un volume d'information à transmettre, par du temps à allouer sur le canal radio.

## 5.8 Notes bibliographiques

Le cas de sessions permanentes s'apparente au modèle introduit par Engset en 1915 pour la téléphonie [44]. Son application aux réseaux de données remonte à Heyman, Lakshman et Neidhardt [47] et Berger et Kogan [2]. Concernant les réseaux à perte, Whitt montre dans [67] que l'approximation usuelle consistant à calculer le taux de blocage sur chaque lien constitue une borne lorsque tous les flots ont le même débit; un contre-exemple est donné dans [9] pour le cas multi-débits. Le routage dynamique est couramment appliqué dans les réseaux téléphoniques [53]; la problématique est plus complexe dans les réseaux de données [58], et des solutions analytiques ne sont connues qu'en présence de contrôle d'admission [17, 48]. Les extensions de l'équité équilibrée au routage multi-chemin et aux réseaux sans fil sont données dans [56] et [20, 59], respectivement.

# Chapitre 6

## Conclusion

« *Things should be made as simple as possible, but no simpler.* »  
Albert Einstein

### 6.1 Quelques résultats solides

Du fait de leur insensibilité, et de la simplicité et la robustesse des résultats qui en découlent, les modèles de trafic présentés dans ce mémoire peuvent être considérés comme les extensions naturelles aux réseaux de données des modèles classiques en commutation de circuits, dérivés du modèle d'Erlang. Je crois en particulier que les systèmes multi-débits exposés au chapitre 3 sont à même de répondre à la plupart des problèmes de dimensionnement des réseaux IP. Suffisamment versatiles pour représenter à peu près n'importe quel type de trafic, ils permettent d'évaluer la performance de manière très rapide, à partir de formules récursives. De plus, l'approximation de découplage présentée au chapitre 4 permet d'étendre le calcul à la performance de bout-en-bout, sur n'importe quelle route du réseau.

Naturellement, les résultats reposent sur une hypothèse de partage des ressources, l'équité équilibrée, qui n'est pas forcément vérifiée. Mais, comme le suggèrent les résultats de simulation, l'important est que le partage soit à *peu près* équitable. Si la plupart des flots s'adaptent à la congestion, ou si le réseau garantit une certaine équité entre les flots par des mécanismes de gestion des files d'attente dans les routeurs, on peut appliquer sans risque les résultats présentés. Et lorsque ces hypothèses ne sont pas satisfaites, ces résultats peuvent toujours servir de gabarit pour jauger la performance du mode de partage, que celui-ci soit induit par le comportement des sources ou imposé par la politique de gestion des ressources de l'opérateur.

### 6.2 Quelques pistes à explorer

Ces travaux ouvrent des perspectives de recherche intéressantes (comme il se doit...). La première concerne l'approximation de découplage présentée au chapitre 4. Celle-ci est-elle conservatrice, comme le suggèrent les résultats obtenus sur l'exemple simple de deux liens ? Est-elle asymptotiquement exacte, lorsque les débits crête sont faibles devant la capacité des liens ? Dans le même ordre d'idées, il faudrait vérifier les conjectures suggérées par les résultats numériques des §5.1 et 5.2, selon lesquelles la présence de flots ou de sessions permanentes a tendance à lisser le trafic et donc à améliorer la performance.

Un autre axe de recherche concerne l'extension des résultats à des régions de capacité plus générales, comme les polytopes convexes introduits au §5.7 dans le contexte des réseaux sans fil, ou de manière générale les ensembles convexes considérés dans [25]. La question de la validité voire de l'existence même d'approximations ou de bornes basées sur le découplage des ressources se pose. On pourrait par ailleurs regarder comment étendre la notion d'équité équilibrée à des ensembles

non-convexes, pour lesquels le maximum (C.3) utilisé dans la définition récursive de la fonction d'équilibre n'est généralement pas unique.

Une troisième piste est liée à la relation, encore mystérieuse à mes yeux, qui existe entre équité proportionnelle et équité équilibrée. Massoulié a en effet montré que la première était la limite de la seconde dans toute direction de l'espace d'états (donc en faisant croître  $x$  sans en changer la direction) [57]. Un autre lien fort vient d'un résultat de Schweitzer, montrant que l'équité proportionnelle est la limite d'un réseau de files d'attente multi-classes fermé de type Kelly [63], qui conduit à un mode de partage insensible sous-optimal du type *store-and-forward*, comme nous l'avons montré dans [28]. Enfin, l'équité proportionnelle coïncide avec l'équité équilibrée pour des réseaux très particuliers : les hypercubes et, pour le cas général d'une région de capacité convexe, les ensembles du type  $\phi_1^\beta + \dots + \phi_N^\beta \leq 1$  avec  $\beta \geq 1$  [20] ; la classe exacte de réseaux pour lesquels ces deux modes de partage coïncident est un problème ouvert.

L'évolution des techniques de stockage et de distribution de contenus requiert également une attention particulière. Le mode de transmission en point-à-point risque de devenir obsolète, au profit du mode multi-point à point, voire multi-point à multi-point, induit par la répartition de l'information en de multiples points du réseau. Le trafic se dirigera naturellement vers les ressources disponibles, en particulier en cœur de réseau où la topologie le permet. L'approche esquissée au §5.6, consistant à modifier la région de capacité en fonction des routes disponibles, offre une perspective pour analyser ce mode de partage de ressources ; il reste à voir si le modèle passe à l'échelle, et en particulier si l'approximation de découplage du chapitre 4 reste compatible avec l'ensemble des contraintes de capacité à prendre en compte.

# Annexe A

## Réseaux de Kelly-Whittle

On donne quelques propriétés clé des réseaux de Kelly-Whittle. On se restreint au cas des réseaux *ouverts* qui suffit pour traiter la plupart des modèles présentés dans ce mémoire. Pour plus de détails, et en particulier pour le cas des réseaux *fermés* qui permettent d'analyser les modèles de type Engset, on réfère le lecteur au livre de Serfozo [64].

On considère  $N$  files d'attente. On note  $x_i$  le nombre de clients dans la file  $i$  et  $x$  le vecteur associé. Le taux de service de chaque file dépend de l'état du système : on note  $\phi_i(x)$  le taux de service de la file  $i$  dans l'état  $x$ . On suppose que la discipline de service de chaque file est à processeur partagé ; cette hypothèse n'est en fait pas essentielle, sauf pour les résultats d'insensibilité.

### A.1 Files en parallèle

On considère tout d'abord le cas de  $N$  files en parallèle, donc couplées uniquement par leurs taux de service. Les clients arrivent dans la file  $i$  selon un processus de Poisson d'intensité  $\lambda_i$  et requièrent des quantités de service mutuellement indépendantes, de loi exponentielle de paramètre  $\mu_i$ . Le réseau est dit de Kelly-Whittle si le processus de Markov  $x$  ainsi défini est réversible, ce qui revient à supposer que les taux de service de toutes files  $i, j$  satisfont la relation d'équilibre suivante :

$$\forall x : x_i > 0, x_j > 0, \quad \phi_i(x)\phi_j(x - e_i) = \phi_j(x)\phi_i(x - e_j). \quad (\text{A.1})$$

Cette relation est équivalente à l'existence d'une fonction d'équilibre  $\Phi$  telle que  $\Phi(0) = 1$  et pour toute file  $i$  :

$$\forall x, x_i > 0, \quad \phi_i(x) = \frac{\Phi(x - e_i)}{\Phi(x)}. \quad (\text{A.2})$$

On a alors la mesure invariante de  $x$  :

$$\pi(x) = \pi(0)\Phi(x)\varrho^x, \quad (\text{A.3})$$

où  $\varrho_i = \lambda_i/\mu_i$  désigne l'intensité de trafic de la file  $i$  et  $\varrho$  est le vecteur associé. Cette mesure invariante ne dépend pas de la loi des quantités de service requises à chaque file, mise à part sa moyenne. On dit que le réseau a la propriété d'*insensibilité*. Nous avons montré dans [26] que la relation d'équilibre (A.1) est en fait une condition nécessaire et suffisante d'insensibilité.

Sous la condition de stabilité, en notant  $\pi$  la distribution stationnaire, on déduit de l'équation d'équilibre local :

$$\lambda_i\pi(x) = \mu_i\phi_i(x + e_i)\pi(x + e_i),$$

la loi de conservation suivante, selon laquelle l'intensité de trafic est égale au taux de service moyen :

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad \varrho_i = \sum_{x: x_i > 0} \phi_i(x)\pi(x). \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Routage statique

Ces résultats se généralisent au cas où les clients sont routés de file en file avant de quitter le réseau. Plus précisément, on suppose que des clients arrivent dans la file  $i$  selon un processus de Poisson d'intensité  $\nu_i$ ; à la fin de son service à la file  $i$ , un client est routé vers la file  $j$  avec probabilité  $p_{ij}$  et quitte le réseau avec probabilité  $1 - \sum_{j=1}^J p_{ij}$ . En supposant l'absence de boucles de routage (tout client finit par quitter le réseau), les taux d'arrivées sont définis comme la solution unique des *équations de trafic* :

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad \lambda_i = \nu_i + \sum_{j=1}^J \lambda_j p_{ji}.$$

Bien que le processus  $x$  ne soit généralement pas réversible, sa mesure invariante est toujours donnée par (A.3) et la loi de conservation (A.4) s'applique. On constate en particulier que, en plus de la propriété d'insensibilité usuelle, les réseaux de Kelly-Whittle sont insensibles au routage, pourvu que celui-ci préserve les taux effectifs d'arrivée de clients à chaque file. Nous avons également montré dans [26] que la relation d'équilibre (A.1) est en fait une condition nécessaire et suffisante pour cette autre propriété d'insensibilité. Celle-ci est essentielle pour montrer l'insensibilité des modèles présentés à la structure du trafic, *via* la notion de session présentée au chapitre 2.

## A.3 Routage dynamique

Enfin, les taux d'arrivées et les probabilités de routage peuvent également dépendre de l'état du système, ce qui est le cas pour le modèle d'équilibrage de charge considéré au §5.5. Dans le cas simple de files parallèles, on suppose que les clients arrivent dans la file  $i$  selon un processus de Poisson d'intensité  $\lambda_i(x)$  dans l'état  $x$ . Le processus de Markov  $x$  reste réversible si et seulement si les taux d'arrivées dans toutes files  $i, j$  satisfont la relation d'équilibre suivante :

$$\forall x, \quad \lambda_i(x) \lambda_j(x + e_i) = \lambda_j(x) \lambda_i(x + e_j).$$

Cette relation est équivalente à l'existence d'une fonction d'équilibre  $\Lambda$  telle que :

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad \lambda_i(x) = \frac{\Lambda(x + e_i)}{\Lambda(x)}.$$

On a alors la mesure invariante de  $x$  :

$$\pi(x) = \pi(0) \Lambda(x) \Phi(x).$$

La propriété d'insensibilité est conservée.

# Annexe B

## Biais d'activité

On expose ici la notion de *biais* d'activité : le fait qu'un client soit actif, c'est-à-dire présent dans le système, modifie sa vision de l'état du système. Cette notion est utilisée pour calculer le taux d'insatisfaction, défini au chapitre 2 comme le taux de congestion vu de l'utilisateur. On montre dans le cadre général des réseaux de Kelly-Whittle avec discipline de service à processeur partagé que ce biais s'obtient simplement en pondérant la distribution stationnaire par le nombre de clients.

### B.1 Une file

On considère tout d'abord une file unique, de taux de service constant et unitaire. Les clients arrivent selon un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  et requièrent des quantités de service mutuellement indépendantes, de loi exponentielle de paramètre  $\mu$ . On note  $\rho = \lambda/\mu$  la charge de la file. Le nombre de clients  $x$  est un processus de Markov réversible, de mesure invariante :

$$\pi(x) = \pi(0)\rho^x. \tag{B.1}$$

En plus de ces clients, un client « test » revient périodiquement dans la file. Les quantités de service requises par ce client suivent également une loi exponentielle de paramètre  $\mu$  ; entre la fin d'un service et le début du suivant, le client test reste inactif pendant une durée de loi exponentielle de paramètre  $\nu$  ; toutes ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes. Le client test va servir à calculer ce que « voit » un client actif.

Soit  $(x, y)$  l'état de la file, où  $x$  est le nombre de clients usuels dans la file, et  $y$  l'état d'activité du client test ( $y = 1$  si le client est actif,  $y = 0$  sinon). Le processus de Markov  $(x, y)$  est réversible, de mesure invariante :

$$\pi(x, y) = \pi(0, 0) \binom{x+y}{x} \rho^x \rho'^y, \tag{B.2}$$

avec  $\rho' = \nu/\mu$ . La condition de stabilité, soit  $\rho < 1$ , est inchangée. Par ailleurs, la distribution stationnaire associée tend vers la distribution initiale (B.1) lorsque  $\nu$  tend vers 0 (le client test « s'évapore »). La distribution stationnaire  $\pi'$  du nombre total de clients vu du client test (y compris lui-même) satisfait :

$$\pi'(x) \propto \pi(x-1, 1),$$

soit, d'après (B.1) et (B.2),

$$\pi'(x) \propto x\pi(x).$$

C'est la distribution initiale pondérée par le nombre de clients. Notons que cette distribution ne dépend pas de  $\nu$  ; elle correspond donc bien à la distribution stationnaire vue d'un client actif.

## B.2 Un réseau

Pour un réseau de Kelly-Whittle tel que décrit en §A.1, la distribution initiale s'écrit :

$$\pi(x) = \pi(0)\Phi(x)\varrho^x. \quad (\text{B.3})$$

Comme précédemment, on ajoute un client test qui revient périodiquement dans le réseau. Les quantités de service requises par ce client à la file  $i$  suivent une loi exponentielle de paramètre  $\mu_i$ ; entre la fin d'un service et le début du suivant, le client test reste inactif pendant une durée de loi exponentielle de paramètre  $\nu$ ; il se dirige alors vers la file  $i$  avec probabilité  $p_i$  (on note  $p$  le vecteur associé). Le client test va servir à calculer ce que « voit » un client actif dans la file  $i$  (avec  $p = e_i$ ) ou un client actif quelconque (avec  $p \propto \lambda$ ).

Soit  $(x, y)$  l'état du réseau, où  $x$  correspond à l'état des clients usuels et  $y$  à l'état du client test ( $y_i = 1$  si le client est dans la file  $i$ ,  $y_i = 0$  sinon). Le processus de Markov  $(x, y)$  est réversible, de mesure invariante :

$$\pi(x, y) = \pi(0, 0)\Phi(x + y) \binom{x + y}{x} \varrho^x \varrho'^y, \quad (\text{B.4})$$

avec  $\varrho' = \nu p / \mu$ . A nouveau, la condition de stabilité est inchangée et la distribution stationnaire associée tend vers la distribution initiale (B.3) lorsque  $\nu$  tend vers 0. La distribution stationnaire  $\pi'$  du nombre total de clients dans chaque file vu du client test ( $y$  compris lui-même) satisfait :

$$\pi'(x) \propto \sum_{y \neq 0} \pi(x - y, y),$$

soit, d'après (B.3) et (B.4),

$$\pi'(x) \propto x_i \pi(x) \quad \text{ou} \quad \pi'(x) \propto |x| \pi(x),$$

selon que  $p = e_i$  ou  $p \propto \lambda$ . C'est la distribution initiale pondérée par le nombre de clients, dans la file  $i$  ou dans le réseau, respectivement. Cette distribution ne dépend pas de  $\nu$  et correspond bien à la distribution stationnaire vue d'un client actif.

## B.3 Ordre stochastique

Dans le cas d'une seule file, il est clair<sup>1</sup> qu'un client actif voit plus de clients dans la file qu'un observateur extérieur. Pour un réseau, il suffit que la propriété de *monotonie* suivante soit satisfaite par les taux de service : dans tout état, ajouter un client dans n'importe quelle file diminue le taux de service reçu par chaque autre client. En effet, la distribution stationnaire vue d'un client présent dans la file  $i$  correspond, d'après (B.4), à celle vue par un client présent en permanence dans la file  $i$ ; or tous les autres clients ont un taux de service inférieur à celui qu'ils auraient en son absence. Par monotonie, il y a plus de clients actifs dans chaque file. Ceci est vrai pour la distribution stationnaire vue d'un client actif quelconque car celle-ci est une moyenne pondérée des distributions stationnaires vues par un client présent dans la file  $i$ , pour  $i = 1, \dots, N$ .

---

1. Cette propriété de monotonie est satisfaite plus généralement pour toute pondération de la distribution stationnaire par une fonction croissante de  $x$ .

## Annexe C

# Équité équilibrée

On définit ici l'équité équilibrée, utilisée dans les chapitres 3, 4 et 5 pour calculer la performance de différents systèmes. Ce mode de partage assure que le réseau de files d'attente sous-jacent est un réseau de Kelly-Whittle. En particulier, l'allocation réalisée est caractérisée de manière unique par une fonction d'équilibre  $\Phi$ , *via* la relation (A.2).

### C.1 Systèmes multi-débits

On considère tout d'abord un système multi-débit, tel que décrit au chapitre 3. L'allocation doit satisfaire les contraintes de débit crête et de capacité dans tout état  $x$ , soit :

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad \phi_i(x) \leq x_i c_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \leq C. \quad (\text{C.1})$$

La fonction d'équilibre est alors définie par :

$$\Phi(x) = \frac{1}{x! c^x} \text{ si } x \cdot c \leq C, \quad \Phi(x) = \frac{1}{C} \sum_{i=1}^N \Phi(x - e_i) \text{ sinon.}$$

On vérifie à partir de (A.2) que les contraintes de débit crête et de capacité (C.1) sont bien satisfaites. Par ailleurs, l'allocation est Pareto-efficace : dans tout état  $x$ , chaque flot est contraint par son débit crête ou par la capacité du lien.

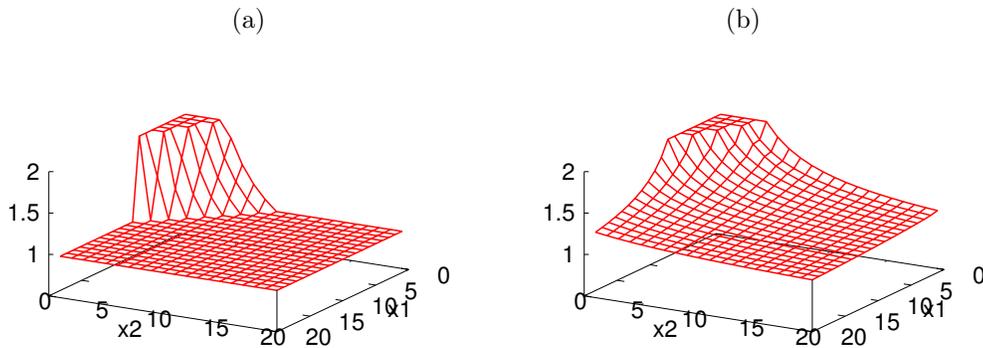


FIGURE C.1 – Deux notions d'équité : (a) max-min, (b) équilibrée.

La FIG. C.1 illustre la différence entre l'équité équilibrée et l'équité dite « max-min », définie dans [3] et couramment utilisée. Les graphiques donnent en fonction de l'état  $x$  le rapport du débit des flots de classes 2 et 1 avec  $c = (1, 2)$  et  $C = 10$ . On constate que la convergence vers l'équité (rapport de débit égal à 1) est beaucoup plus rapide sous l'équité max-min, qui donne une forme de priorité aux flots de faible débit.

## C.2 Réseaux

On considère maintenant le modèle général de réseau décrit au §5.7. L'allocation doit satisfaire les contraintes de débit crête et de capacité dans tout état  $x$ , soit :

$$\forall i = 1, \dots, N, \phi_i(x) \leq x_i c_i \quad \text{et} \quad \forall j = 1, \dots, J, \sum_{i=1}^N A_{ij} \phi_i(x) \leq C_j. \quad (\text{C.2})$$

La fonction d'équilibre est alors définie par :

$$\Phi(x) = \frac{1}{x!c^x} \text{ si } xcA \leq C, \quad \Phi(x) = \max_j \frac{1}{C_j} \sum_{i=1}^N A_{ij} \Phi(x - e_i) \text{ sinon.} \quad (\text{C.3})$$

On vérifie à partir de (A.2) que les contraintes de débit crête et de capacité (C.2) sont bien satisfaites. Par ailleurs, au moins une ressource est pleinement utilisée dès qu'il y a congestion (au sens où  $xcA \not\leq C$ ). L'allocation n'en est pas pour autant Pareto-efficace ; la FIG. C.2 ci-dessous montre en fonction de  $x$  la fraction de bande passante inutilisée pour un triangle homogène, soit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = c = e.$$

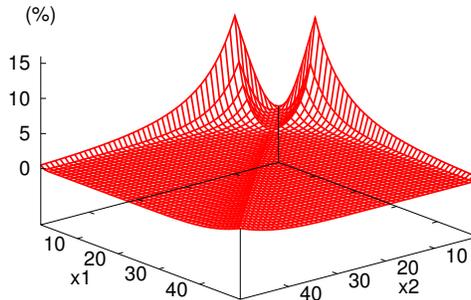


FIGURE C.2 – Pareto-inefficacité de l'équité équilibrée dans le triangle (avec  $x_3 = 10$ ).

# Bibliographie

- [1] S. BEN FREDJ, T. BONALD, A. PROUTIERE, G. REGNIE et J. W. ROBERTS : Statistical bandwidth sharing : a study of congestion at flow level. *In Proceedings of ACM SIGCOMM*, p. 111–122, 2001.
- [2] A. W. BERGER et Y. KOGAN : Dimensioning bandwidth for elastic traffic in high-speed data networks. *IEEE/ACM Trans. Netw.*, 8(5):643–654, 2000.
- [3] D. BERTSEKAS et R. GALLAGER : *Data Networks*. Prentice-Hall, 1987.
- [4] T. BONALD : A score-based opportunistic scheduler for fading radio channels. *In Proceedings of European Wireless*, 2004.
- [5] T. BONALD : Flow-level performance analysis of some opportunistic scheduling algorithm. *European Transactions on Telecommunications*, 2005.
- [6] T. BONALD : The Erlang model with non-poisson call arrivals. *In Proceedings of ACM SIGMETRICS/Performance*, p. 276–286, 2006.
- [7] T. BONALD : Throughput performance in networks with linear capacity constraints. *In Proceedings of the 40th Annual Conference on Information Sciences and Systems*, p. 644–649, March 2006.
- [8] T. BONALD : Insensitive traffic models for communication networks. *Discrete Event Dynamic Systems*, 17(3):405–421, 2007.
- [9] T. BONALD : Bounding the blocking probability in multirate loss networks. Rap. tech., Orange Labs, 2009.
- [10] T. BONALD : A recursive formula for estimating the packet loss rate in IP networks. *In Proceedings of Valuetools*, 2009.
- [11] T. BONALD, S. BORST et A. PROUTIERE : Inter-cell coordination in wireless data networks. *European Transactions on Telecommunications*, 2006.
- [12] T. BONALD, S. C. BORST, N. HEGDE et A. PROUTIERE : Wireless data performance in multi-cell scenarios. *In Proceedings of ACM SIGMETRICS*, p. 378–380, 2004.
- [13] T. BONALD, S. C. BORST et A. PROUTIERE : How mobility impacts the flow-level performance of wireless data systems. *In Proceedings of IEEE INFOCOM*, 2004.
- [14] T. BONALD, M. FEUILLET et A. PROUTIERE : Is the "Law of the Jungle" sustainable for the Internet? *In Proceedings of IEEE INFOCOM 2009*, p. 28–36, April 2009.
- [15] T. BONALD, A. IBRAHIM et J. ROBERTS : Traffic capacity of multi-cell WLANs. *In Proceedings of ACM SIGMETRICS*, p. 419–430, 2008.
- [16] T. BONALD, A. IBRAHIM et J. ROBERTS : Enhanced spatial reuse in multi-cell WLANs. *In Proceedings of IEEE INFOCOM*, p. 2626–2630, April 2009.
- [17] T. BONALD, M. JONCKHEERE et A. PROUTIERE : Insensitive load balancing. *In Proceedings of ACM SIGMETRICS*, p. 367–377, 2004.
- [18] T. BONALD et L. MASSOULIE : Impact of fairness on Internet performance. *In Proceedings of ACM SIGMETRICS/Performance*, p. 82–91, 2001.

- [19] T. BONALD, L. MASSOULIÉ, F. MATHIEU, D. PERINO et A. TWIGG : Epidemic live streaming : optimal performance trade-offs. *In Proceedings of ACM SIGMETRICS*, p. 325–336, 2008.
- [20] T. BONALD, L. MASSOULIÉ, A. PROUTIERE et J. T. VIRTAMO : A queueing analysis of max-min fairness, proportional fairness and balanced fairness. *Queueing Syst.*, 53(1-2):65–84, 2006.
- [21] T. BONALD et P. OLIVIER : Quasi-stationary models for performance analysis of real-time traffic. *In Proceedings of the 18th ITC Specialist seminar*, 2008.
- [22] T. BONALD, P. OLIVIER et J. ROBERTS : Dimensioning high-speed IP access networks. *In Proceedings of ITC 18*, 2003.
- [23] T. BONALD, S. OUESLATI et J. ROBERTS : IP traffic and QoS control : towards a flow-aware architecture. *In Proceedings of World Telecommunications Congress*, 2002.
- [24] T. BONALD, S. OUESLATI, J. ROBERTS et C. ROGER : SWING : Traffic capacity of a simple WDM ring network. *In Proceedings of ITC 21*, 2009.
- [25] T. BONALD, A. PENTTINEN et J. T. VIRTAMO : On light and heavy traffic approximations of balanced fairness. *In Proceedings of ACM SIGMETRICS/Performance*, p. 109–120, 2006.
- [26] T. BONALD et A. PROUTIERE : Insensitivity in processor-sharing networks. *Perform. Eval.*, 49(1/4):193–209, 2002.
- [27] T. BONALD et A. PROUTIERE : Insensitive bandwidth sharing in data networks. *Queueing Syst.*, 44(1):69–100, 2003.
- [28] T. BONALD et A. PROUTIERE : On performance bounds for balanced fairness. *Perform. Eval.*, 55(1-2):25–50, 2004.
- [29] T. BONALD et A. PROUTIERE : On performance bounds for the integration of elastic and adaptive streaming flows. *In Proceedings of ACM SIGMETRICS*, p. 235–245, 2004.
- [30] T. BONALD et A. PROUTIERE : On stochastic bounds for monotonic processor sharing networks. *Queueing Syst.*, 47(1-2):81–106, 2004.
- [31] T. BONALD et A. PROUTIERE : Flow-level stability of utility-based allocations for non-convex rate regions. *In Proceedings of the 40th Annual Conference on Information Sciences and Systems*, p. 327–332, March 2006.
- [32] T. BONALD, A. PROUTIERE et J. W. ROBERTS : Statistical guarantees for streaming flows using Expedited Forwarding. *In Proceedings of IEEE INFOCOM*, p. 1104–1112, 2001.
- [33] T. BONALD et A. PROUTIERE : Wireless downlink data channels : User performance and cell dimensioning. *In Proceedings of ACM MOBICOM*, 2003.
- [34] T. BONALD et A. PROUTIERE : On the traffic capacity of cellular data networks. *In Proceedings of ITC 19*, 2005.
- [35] T. BONALD, A. PROUTIERE, G. RÉGNIÉ et J. ROBERTS : Insensitivity results in statistical bandwidth sharing. *In Proceedings of ITC 17*, 2001.
- [36] T. BONALD et J. ROBERTS : Scheduling network traffic. *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review*, 34(4):29–35, 2007.
- [37] T. BONALD et J. W. ROBERTS : Congestion at flow level and the impact of user behaviour. *Computer Networks*, 42(4):521–536, 2003.
- [38] T. BONALD et M.-A. TRAN : Balancing elastic traffic sources. *IEEE Communications Letters*, 11(8):692–694, August 2007.
- [39] T. BONALD et M.-A. TRAN : Flow vs. time sampling for throughput performance evaluation. *Perform. Eval.*, 64(9-12):1181–1193, 2007.
- [40] T. BONALD et M.-A. TRAN : On Kelly networks with shuffling. *Queueing Syst. Theory Appl.*, 59(1):53–61, 2008.
- [41] T. BONALD et J. VIRTAMO : A recursive formula for multirate systems with elastic traffic. *IEEE Communications Letters*, 9(8):753–755, Aug 2005.

- [42] T. BONALD et J. T. VIRTAMO : Calculating the flow level performance of balanced fairness in tree networks. *Perform. Eval.*, 58(1):1–14, 2004.
- [43] J. DARTOIS : Lost call cleared systems with unbalanced traffic sources. In *Proceedings of ITC 6*, 1970.
- [44] T. ENGSET : On the calculation of switches in an automatic telephone system. In A. MYSKJA et O. ESPVIK, édés : *Tore Olaus Engset : The man behind the formula*, 1998.
- [45] R. FORTET et C. GRANDJEAN : Congestion in a loss system when some calls want several devices simultaneously. *Electrical Communication*, 39(4):513–526, 1964.
- [46] L. GIMPELSON : Analysis of mixtures of wide and narrow-band traffic. *IEEE Trans. Commun. Technol.*, 13(3):258–266, 1965.
- [47] D. P. HEYMAN, T. V. LAKSHMAN et A. L. NEIDHARDT : A new method for analysing feedback-based protocols with applications to engineering Web traffic over the Internet. In *Proceedings of ACM SIGMETRICS*, p. 24–38, 1997.
- [48] M. JONCKHEERE et J. VIRTAMO : Optimal insensitive routing and bandwidth sharing in simple data networks. In *Proceedings of ACM SIGMETRICS*, p. 193–204, June 2005.
- [49] J. KAUFMAN : Blocking in a shared resource environment. *IEEE Trans. Commun.*, 29:1474–1481, 1981.
- [50] F. KELLY : *Reversibility and Stochastic Networks*. Wiley, Chichester, 1979.
- [51] F. KELLY : Loss networks. *The Annals of Applied Probability*, 1(3):319–378, 1991.
- [52] F. KELLY, A. MAULLOO et D. TAN : Rate control in communication networks : shadow prices, proportional fairness and stability. *Journal of the Operational Research Society*, 49, 1998.
- [53] F. P. KELLY : Network routing. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 337, 337:343–367, 1991.
- [54] A. A. KHERANI et A. KUMAR : Stochastic models for throughput analysis of randomly arriving elastic flows in the internet. In *Proceedings of IEEE INFOCOM*, 2002.
- [55] L. KLEINROCK : Time-shared systems : a theoretical treatment. *J. ACM*, 14(2):242–261, 1967.
- [56] J. LEINO et J. VIRTAMO : Insensitive traffic splitting in data networks. In *Proceedings of ITC 19*, p. 1355–1364, Beijing, China, 2005.
- [57] L. MASSOULIÉ : Structural properties of proportional fairness : Stability and insensitivity. *Ann. Appl. Probab.*, 2007.
- [58] S. OUESLATI-BOULAHIA et E. OUBAGHA : An approach to routing elastic flows. In *Proceedings of ITC 16*, p. 1311–1320. Elsevier, 1999.
- [59] A. PENTTINEN, J. VIRTAMO et R. JÄNTTI : Performance analysis in multi-hop radio networks with balanced fair resource sharing. *Telecommunications Systems*, 31(4):315–336, Apr. 2006.
- [60] J. ROBERTS : A service system with heterogeneous user requirement. In G. PUJOLLE, éd. : *Performance of Data Communications Systems and Their Applications*, p. 423–431, 1981.
- [61] J. W. ROBERTS et L. MASSOULIÉ : Bandwidth sharing and admission control for elastic traffic. *Telecommunication Systems*, 15:185–201, 2000.
- [62] K. ROSS : *Multiservice Loss Models for Broadband Telecommunication Networks*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [63] P. SCHWEITZER : Approximate analysis of multiclass closed networks of queues. In *Proceedings of the International conference on stochastic control and optimization*, 1979.
- [64] R. SERFOZO : *Introduction to Stochastic Networks*. Springer-Verlag New York, 1999.
- [65] G. M. STAMATELOS et V. N. KOUKOULIDIS : Reservation-based bandwidth allocation in a radio atm network. *IEEE/ACM Trans. Netw.*, 5(3):420–428, 1997.
- [66] I. E. TELATAR et R. G. GALLAGER : Combining queueing theory with information theory for multiaccess. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 13(6):963–969, 1995.
- [67] W. WHITT : Blocking when service is required from several facilities simultaneously. *AT&T technical journal*, 64(8):1807–1856, 1985.



## Résumé

Ce mémoire décrit des outils mathématiques utiles à l'évaluation de performance des réseaux de données, qui tiennent compte de la nature aléatoire et dynamique du trafic. Le dénominateur commun de ces outils est leur *insensibilité* : la performance ne dépend des caractéristiques statistiques du trafic que par son intensité. Ceci en fait des outils à la fois simples et robustes, qui peuvent être considérés comme les extensions naturelles des outils classiques utilisés en commutation de circuits, issus des travaux d'Erlang.

Les modèles utilisés reposent sur la notion d'*équité équilibrée*, qui garantit la réversibilité du processus de Markov sous-jacent. Ce mode de partage des ressources diffère de ceux couramment utilisés, comme l'équité max-min ou l'équité proportionnelle. Il en fournit néanmoins une très bonne approximation pour les métriques de performance usuelles, telles que le débit moyen ou le taux de perte. Et il présente l'avantage clé de conduire à des expressions explicites.

Ces travaux ouvrent des perspectives de recherche intéressantes, comme la validité de l'approximation de découplage pour les réseaux de grande taille, l'étude des relations structurelles entre équité équilibrée et équité proportionnelle, et l'extension des résultats aux nouvelles techniques de distribution de contenus, stockés en de multiples points du réseau.

## Abstract

This dissertation describes some mathematical tools useful for the performance evaluation of data networks, that account for the random and dynamical nature of traffic. The common property of these tools is their *insensitivity* : performance depends on the statistical characteristics of traffic through its intensity only. The tools are both simple and robust, and may be considered as the natural extensions of the classical tools used for circuit switching, derived from Erlang's work.

The models rely on the notion of *balanced fairness*, that enforces the reversibility of the underlying Markov process. This resource sharing policy differs from those commonly used like max-min fairness or proportional fairness. It provides a very good approximation of these policies for usual performance metrics like the mean throughput or the loss rate. And it has the key advantage of leading to explicit expressions.

This work opens interesting perspectives for future research, like the validity of the decoupling approximation for large networks, the study of structural relationships between balanced fairness and proportional fairness, and the extension of the results to new content distribution techniques, where information is stored in multiple points of the network.