Le Filtrage Collaboratif vu comme un problème de Consensus d'Ordonnancements

Romaric Gaudel, Stéphan Clémençon

LTCI, UMR 5141, Télécom ParisTech/CNRS
46 rue Barrault F-75634 Paris Cedex 13, France
gaudel@telecom-paristech.fr,
clemenco@telecom-paristech.fr

Résumé : Cet article formalise le Filtrage Collaboratif comme un problème de consensus d'ordonnancements. Lorsque les seules informations disponibles sur les utilisateurs sont la liste des produits qu'ils ont achetés ou l'historique des liens qu'ils ont suivis, ce formalisme permet de tenir compte de l'ordre des achats (ou des clics). Un modèle fondé sur un processus de Dirichlet ainsi que sur le modèle de Plackett-Luce est introduit pour gérer le problème de consensus d'ordonnancements correspondant. Enfin, l'article propose un algorithme de chaîne de Markov Monte Carlo à deux niveaux afin d'inférer les paramètres du modèle de consensus d'ordonnancements. Des résultats expérimentaux montrent que l'algorithme proposé est capable de retrouver le mode de chaque exemple dans un délai raisonnable, et ce même pour les configurations comportant jusqu'à 1.000.000 de produits et des historiques d'utilisateurs de taille 1.000. À titre de comparaison, les approches en consensus d'ordonnancement fondées sur des modèles statistiques se limitent de façon standard à des historiques d'utilisateurs de quelques dizaines de produits.

Mots-clés : Apprendre à Ordonner, Systèmes de Recommandation, Apprentissage Non Supervisé, Méthodes Statistiques

1. Introduction

Cet article s'intéresse au Filtrage Collaboratif appliqué au commerce en ligne. Les sites de commerce en ligne offrent des milliers de produits, alors que seule une infime fraction de ces produits est pertinente pour un utilisateur donné. Ces sites Web se doivent donc de fournir aux utilisateurs les outils leur permettant de trouver les produits qui les concernent personnellement.

Une approche consiste à déterminer les préférences d'un utilisateur donné à partir d'informations telles que son âge ou sa localisation géographique,

mais ces informations sont souvent incomplètes ou inexactes. C'est pourquoi les approches standard prennent seulement en compte l'historique des achats et reposent sur une stratégie de *complétion de matrice* (Srebro *et al.*, 2004; Rennie & Srebro, 2005; Goldfarb & Ma, 2009; Mazumder *et al.*, 2010; Richard *et al.*, 2010) : Considérons la matrice indexée par les utilisateurs et les produits telles qu'apparaît un `un` en position (i, j) si l'utilisateur i a acheté le produit j ; un potentiel futur achat pour l'utilisateur i est un produit j tel que la valeur en position (i, j) dans la matrice est non-fournie et « devrait » être `un`.

Notre conjecture est que non seulement le sous-ensemble des produits déjà achetés, mais aussi l'ordre de ces achats donnent des informations sur le comportement des utilisateurs. L'ordre d'achat des produits capture à la fois les dépendances entre produits (après avoir acheté une tablette graphique, un utilisateur est plus susceptible d'acheter des accessoires associés), ainsi que les préférences ou les besoins prioritaires d'un utilisateur (un produit plus prioritaire est acheté avant un produit moins prioritaire).

Dans ce contexte, un utilisateur correspond à un ordonnancement des produits, dont on ne connaît que les premiers éléments. Les ordonnacements associés à des utilisateurs aux préférences similaires sont alors tirés selon une *distribution élémentaire sur l'ensemble des permutations de produits*. Et finalement, l'ensemble des utilisateurs suit une loi de mélange de DEEPP. On se retrouve donc confronté à un problème d'apprentissage non supervisé : déterminer de quel mode (i.e. DEEPP) est issu chaque utilisateur afin de prédire son comportement futur en se fondant sur les utilisateurs du même mode.

L'approche proposée est partie intégrante des méthodes de consensus d'ordonnancements (Busse *et al.*, 2007; Lebanon & Mao, 2008; Gormley & Murphy, 2009; Guiver & Snelson, 2009; Meilă & Chen, 2010). La contribution principale de cet article est d'introduire un mélange de DEEPP (et le processus d'inférence correspondant) qui soit capable de retrouver les paramètres de mélanges sur des données comportant jusqu'à 10^6 produits et 10^3 produits déjà achetés par utilisateur.

L'article est organisé comme suit : la section 2. présente brièvement les approches récentes pour le consensus d'ordonnancements fondées sur un mélange de DEEPP. La formalisation du Filtrage Collaboratif comme un problème de consensus d'ordonnancements est présentée dans la section 3., et la section 4. démontre l'efficacité du modèle proposé lorsqu'il est confronté à un grand nombre de produits ou d'utilisateurs. Enfin, l'article conclut par quelques perspectives de recherche.

2. Consensus d'ordonnancements avec modèles de mélange

Les modèles de mélange de DEEPP sont fondés sur deux modèles de DEEPP : le modèle de Mallows (Mallows, 1957) et le modèle de Plackett-Luce (Luce, 1959; Plackett, 1975).

2.1. Modèle de Mallows

Le modèle de Mallows est un modèle exponentiel fondé sur une distance entre permutations. Une distance largement utilisée est le τ de Kendall d_τ, qui compte le nombre de désaccords entre deux permutations (Kendall, 1938). d_τ a deux intérêts : d'une part, il conduit à une solution analytique de la constante de normalisation de la distribution de Mallows (et de la constante de normalisation des distributions conditionnelles correspondantes, comme expliqué ci-après) ; d'autre part, d_τ se décompose en une somme

$$d_\tau(\sigma, \pi) = \sum_{k=1}^{M-1} s_k(\sigma, \pi),$$

où M est le nombre de produits et $s_k(\sigma, \pi) = \sum_{k'>k} \mathbb{1}_{[\pi\sigma^{-1}(k)>\pi\sigma^{-1}(k')]}$ caractérise le nombre de transpositions adjacentes nécessaires pour placer le k-ième produit d'après σ en position k dans π (Fligner & Verducci, 1986). En utilisant cette décomposition, si un ordonnancement restreint à ses t premiers éléments est interprété comme le sous-groupe à droite $\mathfrak{S}_{M-t}\pi = \{\sigma \in \mathfrak{S}_M : \pi^{-1}(j) = \sigma^{-1}(j), j = 1, \ldots, t\}$ de l'ensemble $\mathfrak{S}_M$ des permutations, alors la loi du modèle de Mallows correspondante (équation (1)) se simplifie en faisant intervenir la distance de Kendall d'_τ ne tenant compte que d'un sous-ensemble I des termes de la somme (équation (2)).

$$\mathbb{P}_{\mathbf{M}}(\mathfrak{S}_{M-t}\pi \mid \sigma) \overset{\text{def}}{\propto} \sum_{\pi' \in \mathfrak{S}_{M-t}\pi} \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{M-1} s_k(\pi', \sigma)\right) \tag{1}$$

$$\propto \exp\left(-\lambda \sum_{k \in I} s_k(\pi, \sigma)\right) \tag{2}$$

(Busse *et al.*, 2007) et (Meilă & Chen, 2010) appliquent tous les deux ce modèle lorsque seuls les produits les mieux classés sont connus [1]. Leur

1. (Meilă & Chen, 2010) considère un modèle avec plus de paramètres : λ n'est plus une constante, mais dépend de k.

objectif est de déterminer les paramètres qui permettent une adéquation optimale entre le modèle et les données. (Busse *et al.*, 2007) choisit la taille du mélange d'après le *critère d'information bayésien* (BIC) et estime les paramètres de chaque mode en utilisant un algorithme d'*espérance-maximisation* (EM). (Meilă & Chen, 2010) utilise un Processus de Dirichlet pour contrôler le nombre de modes et déduit les paramètres du modèle en utilisant un échantillonneur de Gibbs.

(Lebanon & Mao, 2008) se distingue de ces approches à deux égards. Premièrement, il se concentre sur un modèle non-paramétrique, dérivé du modèle de Mallows. Deuxièmement, il va au-delà des t premiers produits, en considérant également des ordonnancements avec égalités. Pour ce faire, il utilise des statistiques autres que les s_k, mais qui s'en inspirent fortement.

2.2. Modèle de Plackett-Luce

Le modèle de Plackett-Luce (PL) considère que les ordonnancements sont générés en tirant les produits un par un sans remise : le k-ième produit de l'ordonnancement est le k-ième produit tiré. Concrètement, Chaque produit j est associé à un poids q_j proportionnel à sa probabilité d'être tiré. Ainsi la probabilité associée à un ordonnancement partiel $\mathfrak{S}_{M-t}\pi$ est

$$\mathbb{P}_{\text{PL}}(\mathfrak{S}_{M-t}\pi \mid \boldsymbol{q}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{t} \frac{q_{\pi^{-1}(k)}}{Z_{\pi,k-1}}, \tag{3}$$

où $Z_{\pi,k-1} = \sum_{j\in\pi^{-1}(k,\ldots,M)} q_j$ est un facteur de normalisation.

Gormley & Murphy (2008, 2009) utilisent un modèle de mélange de DEEPP fondé sur le modèle de PL. (Gormley & Murphy, 2008) envisage un *modèle de PL généralisé*, où la différence entre le poids des produits diminue avec le rang dans le classement. Il utilise un mélange de taille fixe dont les paramètres sont déduits par une variante d'EM et il choisit finalement le meilleur modèle d'après le critère BIC. (Gormley & Murphy, 2009) utilise quant à lui un modèle de PL standard, où un utilisateur appartient à un mode c avec une probabilité w_c, au lieu d'appartenir à un seul mode. Le poids de chaque produit est ensuite obtenu en combinant les poids des différents modes (cf. équation (4)), et le nombre de modes du mélange de DEEPP est contrôlé par un processus de Dirichlet, dont les paramètres sont inférés à l'aide d'un échantillonneur de Gibbs.

$$\mathbb{P}_{\text{PL}}(\mathfrak{S}_{M-t}\pi \mid \boldsymbol{w}, \boldsymbol{q}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{q}^{(C)}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{t} \sum_{c=1}^{C} w_c \frac{q^{(c)}_{\pi^{-1}(k)}}{Z^{(c)}_{\pi,k-1}} \tag{4}$$

Enfin, (Guiver & Snelson, 2009) propose une approche alternative pour inférer les paramètres d'un modèle de PL. Cette approche, fondée sur l'échange de messages, a l'intérêt de pouvoir fonctionner avec des ordonnancements partiels (ce qui n'est pas le cas de (Gormley & Murphy, 2008, 2009)). Mais l'approche proposée est fondée sur un unique modèle de PL, il reste à l'étendre à un mélange de modèles.

À notre connaissance, les modèles de Mallows et de Plackett-Luce ont été, jusqu'à présent, appliqués à des problèmes (i) avec tout au plus quelques milliers de produits classés et (ii) en ne considérant au plus que les 40 premiers produits pour chaque utilisateur. L'approche proposée dans l'article courant a pour objectif de montrer qu'un modèle statistique est en mesure de faire face à 10^6 produits dont les 10^3 premiers sont connus pour chaque utilisateur.

Le modèle proposé se fonde sur le modèle de PL pour diverses raisons. Tout d'abord, le modèle de PL associe une probabilité non seulement aux ordonnancements restreints aux premiers produits, mais aussi aux ordonnancements sur un sous-ensemble de produits. En outre, le modèle de PL est capable de représenter les différences dans les degrés de préférences : considérons trois produits j_0, j_1 et j_2 tels que j_0 est fortement préféré à j_1, qui est lui-même faiblement préféré à j_2 ; le modèle de Mallows se limite alors à considérer l'ordonnancement $j_0 > j_1 > j_2$, alors que le modèle de PL reflète la variabilité des préférences en associant des poids aux produits tels que q_{j_0}/q_{j_1} est supérieur à q_{j_1}/q_{j_2}. Enfin, le modèle de PL permet de traiter un grand nombre de produits, à condition que seul un petit sous-ensemble de ces produits soit intéressant et que les autres produits aient un poids constant.

3. Mélange de modèles de Plackett-Luce par processus de Dirichlet

L'approche proposée est de considérer que la restriction aux t_i premiers produits de chaque ordonnancement π_i, où $i \in 1, \ldots, n$ est l'un des n utilisateurs, est générée par un processus de Dirichlet (Antoniak, 1974) :

$$G \mid \alpha, \boldsymbol{\beta} \sim DP(\alpha, Dir(\boldsymbol{\beta})) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{q}_i \mid G \sim G \tag{9}$$

$$\mathfrak{S}_{M-t_i}\pi_i \mid \boldsymbol{q}_i \sim PL(\boldsymbol{q}_i), \tag{10}$$

Algorithm 1 Infère les paramètres du processus de Dirichlet

Entrée : Paramètres α, β, T_{Gibbs} ; Données $\pi_{1,\dots,N}$
Sortie : $c_{1,\dots,N}$, C, $\boldsymbol{q}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{q}^{(C)}$
Initialise aléatoirement $c_{1,\dots,N}$, C, $\boldsymbol{q}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{q}^{(C)}$
pour $t = 1$ **à** T_{Gibbs} **faire**
  /* Reéchantillonne l'affectation des modes */
  pour $i = 1$ **à** N **faire**
    Tirer c_i selon $\mathbb{P}(c_i = c \mid \pi_i, \boldsymbol{n}_{-i}, \Theta)$

$$\propto \begin{cases} \frac{n_{-i,c}}{n-1+\alpha} \mathbb{P}_{PL}(\pi_i \mid \boldsymbol{q}^{(c)}) & \text{si } n_{-i,c} \neq 0 \\ \frac{\alpha}{n-1+\alpha} \frac{(M-t_i)!}{M!} & \text{sinon} \end{cases} \tag{5}$$

    si $n_{c_i} = 1$ **alors**
      Tirer $\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{q}^{(c_i)}$ selon

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{q}_i \mid \pi_i, \beta) \propto \mathbb{P}_{PL}(\pi_i \mid \boldsymbol{q}_i) \mathbb{P}_{Dir}(\boldsymbol{q}_i \mid \boldsymbol{\beta}) \tag{6}$$

    finsi
  fin pour
  /* Reéchantillonne les paramètres des modes */
  pour $c = 1$ **à** C **faire**
    si $n_c > 1$ **alors**
      Tirer $\boldsymbol{q}^{(c)}$ selon $\mathbb{P}(\boldsymbol{q}^{(c)} \mid \{\pi_i : c_i = c\}, \beta)$

$$\propto \prod_{i:c_i=c} \mathbb{P}_{PL}(\pi_i \mid \boldsymbol{q}^{(c)}) \mathbb{P}_{Dir}(\boldsymbol{q}^{(c)} \mid \boldsymbol{\beta}) \tag{7}$$

    finsi
  fin pour
fin pour

où $\boldsymbol{\beta} = \beta(1, \dots, 1)$ puisque tous les produits sont a priori équivalents. Le processus dépend des deux paramètres α et β, et du nombre t_i de produits achetés par chaque utilisateur i. Par suite du processus de Dirichlet, les paramètres de poids vivent dans un ensemble fini $\Theta = \{\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_n\}$. Si on note $\boldsymbol{q}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{q}^{(C)}$ les C éléments de Θ, chaque utilisateur i est donc associé à un mode $c_i \in 1, \dots, C$ tel que $\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{q}^{(c_i)}$. Pour des raisons de lisibilité, dans la suite de cet article, le terme $\mathfrak{S}_{M-t_i}$ sera omis et π_i correspondra à l'ordonnan-

cement du i-ième utilisateur restreint aux t_i premiers rangs.

3.1. Inférence du nombre de modes

Les paramètres du modèle sont inférés par l'algorithme 1 fondé sur un échantillonneur de Gibbs (Neal, 2000). La variable n_c (respectivement $n_{-i,c}$) correspond au nombre d'utilisateurs associés au mode c (resp. le nombre d'utilisateurs, autres que i, associés au mode c).

Le choix du mode associé à chaque utilisateur (équation (5)) fait intervenir le terme $\frac{(M-t_i)!}{M!}$, qui correspond à la solution analytique de l'intégrale (11) (démonstration en annexe). Cette solution analytique découle du fait que, comme tous les produits sont a priori équivalents, les $\frac{M!}{(M-t_i)!}$ choix possibles pour les t_i premiers produits sont équiprobables.

$$\int_{\boldsymbol{q}} \mathbb{P}_{PL}(\pi_i \mid \boldsymbol{q}) \mathbb{P}_{Dir}(\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{\beta}) d\boldsymbol{q}. \tag{11}$$

3.2. Inférence d'un mode

L'inférence des paramètres d'un mode diffère selon qu'il est associé à un ou plusieurs exemples. Lorsqu'il n'y a qu'un seul exemple composant le mode, la loi a posteriori des paramètres de ce mode (équation (6)) peut être marginalisée et tirée à l'aide l'algorithme 2 (démonstration en annexe).

Algorithm 2 Tire selon $\mathbb{P}(\boldsymbol{q} \mid \pi, \beta)$

Entrée : Paramètre β ; Données π
Sortie : $\boldsymbol{q}$
/* Premiers produits */
pour $k = 1$ **à** t **faire**
Tirer $\boldsymbol{q}_{\pi^{-1}(k)}$ selon $\left(1 - \sum_{k'=1}^{k-1} q_{\pi^{-1}(k')}\right) \times Beta\left(\beta + 1, (M-k)\beta\right)$
fin pour
/* Autres produits */
Tirer $q_{\pi^{-1}(t+1,\ldots,M)}$ selon $\left(1 - \sum_{k=1}^{t} q_{\pi^{-1}(k)}\right) \times Dir\left(\beta, \ldots, \beta\right)$

Lorsque le mode comporte plusieurs utilisateurs, la loi a posteriori des paramètres du mode (équation (7)) ne peut être qu'en partie marginalisée. En s'inspirant de (Gormley & Murphy, 2009), l'approche proposée échantillonne donc selon l'équation (7) en utilisant le cadre Metropolis Hasting. Ce

cadre conduit à l'algorithme 3 (démonstration en annexe), où ν_j est le nombre d'utilisateurs classant le produit j parmi les premiers, J est l'ensemble des produits classés parmi les premiers par un utilisateur au moins, s correspond à $\left(1 - \sum_{j \in J} q_j\right)$, et le ratio $\frac{\mathbb{P}((\boldsymbol{q}^*, s^*) \to (\boldsymbol{q}, s))}{\mathbb{P}((\boldsymbol{q}, s) \to (\boldsymbol{q}^*, s^*))}$ entre les probabilités de transition de l'algorithme de Metropolis Hasting est donné par

$$\frac{\prod_{j \in J} q_j^{K_j - 1} s^{K-1} {\theta_j}^{K_j} \theta^K \left[\sum_{j \in J} \frac{q_j^*}{\theta_j} + \frac{s^*}{\theta}\right]^{\sum_{j \in J} K_j + K}}{\prod_{j \in J} {q_j^*}^{K_j - 1} {s^*}^{K-1} {\theta_j^*}^{K_j} {\theta^*}^K \left[\sum_{j \in J} \frac{q_j}{\theta_j^*} + \frac{s}{\theta^*}\right]^{\sum_{j \in J} K_j + K}}.$$

Algorithm 3 Tire selon $\mathbb{P}(\boldsymbol{q} \mid \pi_{1,\dots,n'}, \beta)$

Entrée : Paramètres β, T_{MH} ; Données $\pi_{1,\dots,n'}$
Sortie : $\boldsymbol{q}$
Initialise $\boldsymbol{q}$ aléatoirement
$\forall j \in J, K_j \leftarrow \beta + \nu_j$; $K \leftarrow (M - |J|)\beta$
/* Produits parmi les premiers pour un des utilisateurs */
pour $t = 1$ **à** T_{MH} **faire**
$\forall j \in J, \theta_j^{-1} \leftarrow \sum_{\substack{(i,k) \\ k \leqslant t_i \\ k \leqslant \pi_i(j)}} \frac{1}{s + \sum_{\substack{j' \in J \\ \pi_i(j') \geqslant k}} q_{j'}}$; $\theta^{-1} \leftarrow \sum_{\substack{(i,k) \\ k \leqslant t_i}} \frac{1}{s + \sum_{\substack{j' \in J \\ \pi_i(j') \geqslant k}} q_{j'}}$
/* Tire une proposition */
$\forall j \in J$, Tirer $\tilde{q}_j$selon $\text{Gamma}(K_j, \theta_j)$; Tirer $\tilde{s}$ selon $\text{Gamma}(K, \theta)$
$(\boldsymbol{q}^*, s^*) \leftarrow (\tilde{\boldsymbol{q}}, \tilde{s}) \,/\, \left(\sum_{j \in J} \tilde{q}_j + \tilde{s}\right)$
/* Accepte ou refuse la proposition */
$(\boldsymbol{q}, s) \leftarrow (\boldsymbol{q}^*, s^*)$ avec probabilité
$$\min\left(\frac{\mathbb{P}(\boldsymbol{q}^*, s^* | \pi_{1,\dots,n'}, \beta) \mathbb{P}((\boldsymbol{q}^*, s^*) \to (\boldsymbol{q}, s))}{\mathbb{P}(\boldsymbol{q}, s | \pi_{1,\dots,n'}, \beta) \mathbb{P}((\boldsymbol{q}, s) \to (\boldsymbol{q}^*, s^*))}, 1\right)$$
fin pour
/* Autres produits */
Tirer $q_{1,\dots,m \setminus J}$ selon $s \times Dir(\beta, \dots, \beta)$

Les algorithmes 1 et 3 sont paramétrés par le nombre de fois qu'ils entrent dans leur boucle (respectivement T_{Gibbs} et T_{MH}). Lors des expériences, $T_{\text{Gibbs}} = T_{\text{MH}} = 5$ se sont avérées être des valeurs suffisantes.

4. Passage à l'échelle empirique

Le premier objectif de l'approche proposée est de retrouver le mode de chaque utilisateur en présence d'un grand nombre d'utilisateurs et de produits. Dans cette section, le modèle proposé est testé sur des données artificielles afin de préciser pour quel ordre de grandeur de la taille du problème l'approche proposée remplit cet objectif.

4.1. Protocole expérimental

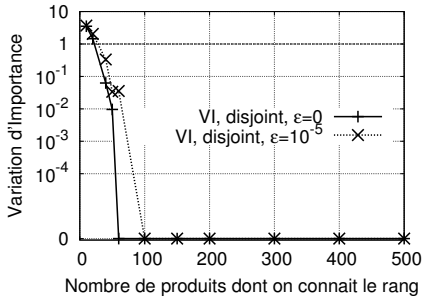
Les expériences sont menées sur des données artificielles de $N = 10^4$ exemples répartis entre $C = 5$ modes. Chaque mode échantillonne les exemples d'après un modèle de PL qui considère $m = 100$ produits intéressants pondérés $\frac{m}{mZ}, \frac{m-1}{mZ}, \ldots, \frac{1}{mZ}$ avec Z un facteur de normalisation, alors que les autres produits ont un poids par défaut $\frac{\varepsilon}{Z}$.

La difficulté de l'inférence est contrôlée par le nombre total de produits $M = 10^6$, par le poids par défaut ε, et par la corrélation entre les sous-ensembles de produits intéressants des différents modes. Trois configurations pour cette corrélation ont été étudiées : l'intersection entre les sous-ensembles de produits intéressants de deux modes différents est vide (noté *disjoint*) ; les modes 1 et 2, ainsi que les modes 3 et 4, ont les mêmes $\frac{m}{2}$ premiers produits intéressants (noté *même_début*) ; les modes 1 et 2, ainsi que modes 3 et 4, ont les même $\frac{m}{2}$ derniers produits intéressants (noté *même_fin*).

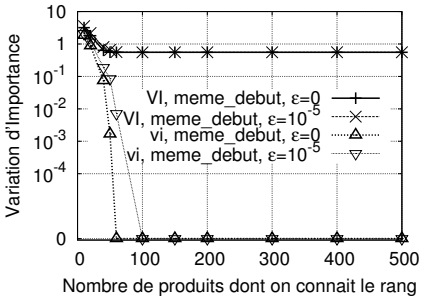
L'algorithme 1 retourne une partition $\hat{\mathcal{C}}$ des utilisateurs, qui estime la vraie partition $\mathcal{C}$. La distance entre ces deux partitions est mesurée par le critère de *Variation d'Importance* (VI) introduit par (Meilă, 2007) et qui correspond à la somme de l'entropie conditionnelle de $\mathcal{C}$ sachant $\hat{\mathcal{C}}$ avec l'entropie conditionnelle de $\hat{\mathcal{C}}$ sachant $\mathcal{C}$.

$$\mathrm{VI}(\mathcal{C}, \hat{\mathcal{C}}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{H}(\mathcal{C} \mid \hat{\mathcal{C}}) + \mathrm{H}(\hat{\mathcal{C}} \mid \mathcal{C})$$

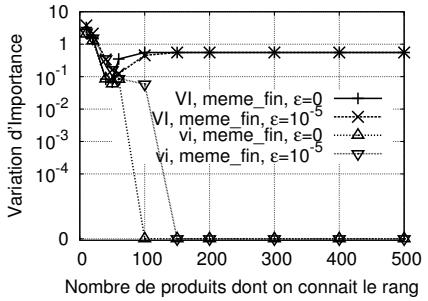
Une petite valeur de VI signifie que simultanément (i) le vrai mode c_i de l'exemple i peut être déduit du mode appris $\hat{c}_i$ (car $\mathrm{H}(\mathcal{C} \mid \hat{\mathcal{C}})$ est faible), et (ii) $\hat{\mathcal{C}}$ est composé d'aussi peu de groupes que possible (puisque $\mathrm{H}(\hat{\mathcal{C}} \mid \mathcal{C})$ est petit). Avec les configurations même_début et même_fin, la partition $\mathcal{C}'$, regroupant les modes 1 et 2 ainsi que les modes 3 et 4, est également pertinente, les résultats présentés incluent donc $\mathrm{VI}(\mathcal{C}', \hat{\mathcal{C}})$ (noté vi sur les figures).



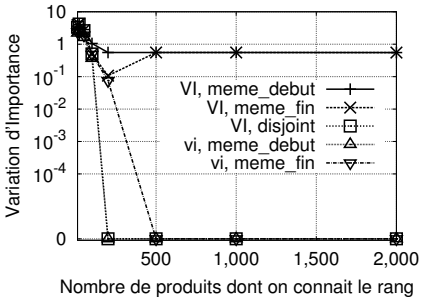
(a) $C = 5$, $m = 100$



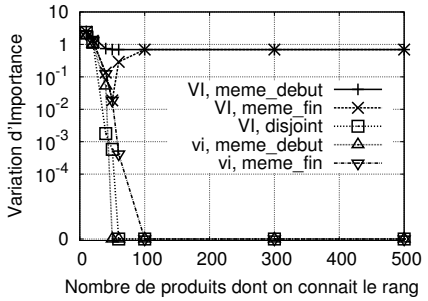
(b) $C = 5$, $m = 100$



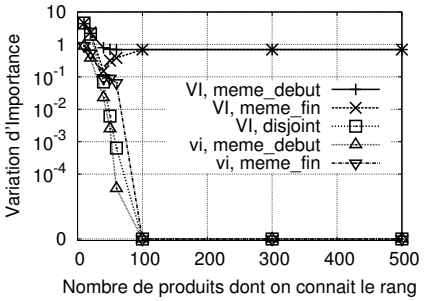
(c) $C = 5$, $m = 100$



(d) $C = 5$, $m = 1000$, $\varepsilon = 0$



(e) $C = 2$, $m = 100$, $\varepsilon = 0$



(f) $C = 10$, $m = 100$, $\varepsilon = 0$

FIGURE 1: Performance par rapport au nombre de produits achetés par chaque utilisateur. La performance mesurée est la Variation d'Importance moyennée sur 10 essais indépendants. Les données comportent $N = 10^4$ exemples répartis entre C modes. Chaque mode tire les exemples d'après un modèle de Plackett-Luce qui implique m produits intéressants parmi $M = 10^6$ produits.

TABLE 1: Temps de calcul en utilisant un cœur d'un processeur Intel(R) Core(TM) i5 (CPU 2.40GHz) avec 2 Go de mémoire.

m	t	ε	temps cpu
100	100	0	6 sec.
1.000	1.000	0	2 min.
100	500	10^{-5}	20 min.

4.2. Résultats sur les données synthétiques

Les figures 1(a-c) montrent le comportement typique de $\mathrm{VI}(\mathcal{C}, \hat{\mathcal{C}})$ selon le nombre t de premiers produits connus pour chaque utilisateur. Avec la configuration disjoint et $\varepsilon = 0$, $\mathrm{VI}(\mathcal{C}, \hat{\mathcal{C}})$ diminue avec t et atteint zéro pour $t = 60$. Avec les deux autres configurations, $\mathrm{VI}(\mathcal{C}, \hat{\mathcal{C}})$ conserve une valeur élevée, tandis que $\mathrm{VI}(\mathcal{C}', \hat{\mathcal{C}})$ diminue et atteint zéro lorsque $t = 60$ ou 100. Ainsi, l'approche proposée retrouve la partition initiale, mais en regroupant les modes avec un trop grand nombre de produits intéressants en commun. En outre, ces résultats restent valables lorsque ε est non-nul. En effet, les résultats sont semblables lorsque ε vaut 10^{-5}, ce qui impose pourtant de choisir un sixième des premiers produits parmi les produits inintéressants.

Les figures 1(d-f) montrent comment évoluent les résultats lorsque l'on fait varier le nombre C de modes ou le nombre m de produits intéressants. Ces expériences démontrent que (i) l'approche s'adapte au nombre de modes, et (ii) l'approche passe à l'échelle avec le nombre de premier produits connus : la partition initiale est retrouvée alors que l'on fournit à l'algorithme les 1.000 premiers produits de chaque utilisateur, tandis que les approches de l'état de l'art se limitent au plus aux 40 premiers produits.

L'approche proposée consacre la plupart du temps de calcul au calcul des paramètres θ introduits dans l'algorithme 3. Par conséquent, comme le montre le tableau 1, l'algorithme termine rapidement lorsque simultanément $\varepsilon = 0$ et $t < m$, alors que l'algorithme nécessite un temps de calcul plus long lorsque ε est non-nul ou lorsqu'on considère la situation (irréaliste [2]) où $t > m$.

2. Les utilisateurs achètent des produits qu'ils n'aiment pas.

5. Discussion

Cet article contient deux apports principaux. Premièrement, il introduit une formalisation du Filtrage Collaboratif comme un problème de consensus d'ordonnancements. Cette nouvelle formalisation permet de prendre en compte l'ordre des achats des utilisateurs et conduit à un modèle d'utilisateur fondé sur un mélange de modèles de Plackett-Luce, ce mélange étant contrôlé par un processus de Dirichlet. Deuxièmement, les paramètres du modèle proposé sont inférés grâce à une approche par chaînes de Markov Monte Carlo (MCMC) à deux niveaux.

L'utilisation d'un mélange de modèles de Plackett-Luce contrôlé par un processus de Dirichlet, en combinaison avec l'inférence par MCMC, permet de considérer des modèles comportant jusqu'à 10^6 produits et des utilisateurs ayant déjà acheté jusqu'à 10^3 produits, alors que les approches standard examinent tout au plus quelques milliers de produits, avec seulement 40 produits d'ores et déjà achetés par chaque utilisateur.

Une perspective intéressante serait de combiner le modèle proposé avec les approches de complétion de matrices (Rennie & Srebro, 2005; Mazumder *et al.*, 2010), ce qui améliorerait la précision de la prédiction, en tenant compte simultanément de l'ordre des achats et des informations sur les produits et/ou les utilisateurs.

Remerciements

Nous remercions Digiteo pour le financement du projet *Bemol* regroupant le CMLA de l'ENS Cachan et le LTCI de Télécom-ParisTech.

Appendice

Inférence du nombre de modes

Considérons un utilisateur associé à la permutation π dont on connaît les t premiers rangs. Les $M - t$ autres produits sont ordonnés aléatoirement. Soit p_0 la probabilité marginale de la seule observation π selon le processus de Dirichlet. Cette section démontre la solution analytique $p_0 = (M - t)!/M!$ pour $1 < t < M$ (la preuve peut être facilement étendue à $t = 1$ ou $t = M$). Cette solution analytique est obtenue par intégrations successives selon le poids des produits en allant du dernier produit au premier. Supposons, sans

perte de généralité que les indices des produits sont dans le même ordre que les préférences de l'utilisateur (i.e. $\forall j \in 1, \ldots, M : \pi(j) = j$).

Par définition

$$\mathbb{P}_{PL}(\pi \mid \boldsymbol{q})\mathbb{P}_{Dir}(\boldsymbol{q} \mid \beta) = \prod_{k=1}^{t} \frac{q_{\pi^{-1}(k)}}{Z_{\pi,k-1}} \frac{\Gamma(M\beta)}{\Gamma(\beta)^M} \prod_{j=1}^{M} q_j^{\beta-1} \tag{12}$$

$$= \frac{\Gamma(M\beta)}{\Gamma(\beta)^M} \prod_{k=1}^{t} \frac{q_k^{\beta}}{Z_{\pi,k-1}} \prod_{k=t+1}^{M} q_k^{\beta-1} \tag{13}$$

Donc p_0 se décompose sous la forme

$$\frac{\Gamma(M\beta)}{\Gamma(\beta)^M} \int_{\sum_{k=1}^{t} q_k<1} \prod_{k=1}^{t} \frac{q_k^{\beta}}{Z_{\pi,k-1}} dq_k \int_{\sum_{k=t+1}^{M} \boldsymbol{q}_k = Z_{\pi,t}} \prod_{k=t+1}^{M} q_k^{\beta-1} dq_k \tag{14}$$

En remplaçant q_k par $Z_{\pi,t}\tilde{q}_k$, et en utilisant les propriétés de la loi de Dirichlet, l'intégrale interne s'écrit

$$Z_{\pi,t}^{(M-t)\beta-1} \int_{\sum_{k=t+1}^{M} \tilde{q}_k=1} \prod_{k=t+1}^{M} \tilde{q}_k^{\beta-1} d\tilde{q}_k = Z_{\pi,t}^{(M-t)\beta-1} \frac{\Gamma(\beta)^{M-t}}{\Gamma((M-t)\beta)} \tag{15}$$

ce qui donne, une fois injecté dans l'équation (14),

$$\frac{\Gamma(M\beta)}{\Gamma(\beta)^M} \frac{\Gamma(\beta)^{M-t}}{\Gamma((M-t)\beta)} \int_{\sum_{k=1}^{t-1} q_k<1} \frac{\prod_{k=1}^{t-1} q_k^{\beta} dq_k}{\prod_{k=1}^{t} Z_{\pi,k-1}} \left(\int_{q_t + Z_{\pi,t} = Z_{\pi,t-1}} q_t^{\beta} Z_{\pi,t}^{(M-t)\beta-1} dq_t \right) \tag{16}$$

En remplaçant q_t par $Z_{\pi,t-1}\tilde{q}_t$, et en utilisant les propriétés de la loi de Dirichlet, on obtient à nouveau une solution analytique pour l'intégrale interne, conduisant à la nouvelle expression pour q_0

$$\frac{\Gamma(M\beta)}{\Gamma(\beta)^M} \frac{\Gamma(\beta)^{M-t}}{\Gamma((M-t)\beta)} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma((M-t)\beta)}{\Gamma((M-t+1)\beta+1)} \int_{\sum_{k=1}^{t-2} q_k<1} \frac{\prod_{k=1}^{t-2} q_k^{\beta} dq_k}{\prod_{k=1}^{t-1} Z_{\pi,k-1}} \left(\int_{q_{t-1} + Z_{\pi,t-1} = Z_{\pi,t-2}} q_{t-1}^{\beta} Z_{\pi,t-1}^{(M-t+1)\beta-1} dq_{t-1} \right) \tag{17}$$

En itérant la dernière étape pour chacun des t premiers produits, on obtient

$$p_0 = \frac{\Gamma(M\beta)}{\Gamma(\beta)^M} \frac{\Gamma(\beta)^{M-t}}{\Gamma((M-t)\beta)} \prod_{k=M-t}^{M-1} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(k\beta)}{\Gamma((k+1)\beta+1)} = \frac{(M-t)!}{M!}$$

Inférence d'un mode contenant exactement un utilisateur

Considérons un utilisateur associé à la permutation π dont on connaît les t premiers rangs. Les $M-t$ autres produits sont ordonnés aléatoirement. Cette section démontre que l'algorithme 2 échantillonne $\boldsymbol{q}$ selon la loi de probabilité

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{q} \mid \pi, \beta) = \mathbb{P}_{PL}(\pi \mid \boldsymbol{q})\mathbb{P}_{Dir}(\boldsymbol{q} \mid \beta),$$

pour $1 < t < M$ (la preuve peut être facilement étendue à $t = 1$ ou $t = M$). Supposons, sans perte de généralité que les indices des produits sont dans le même ordre que les préférences de l'utilisateur ($\forall j \in 1, \ldots, M : \pi(j) = j$).

La démonstration de la section précédente induit que pour tout $j \in 1, \ldots, t$

$$\mathbb{P}(q_j \mid \pi, \beta, q_{1,\ldots,j-1}) \propto q_j^{\beta}(Z_{\pi,j-1} - q_j)^{(M-j)\beta-1}\mathbb{1}_{0<q_j<Z_{\pi,j-1}}, \tag{18}$$

ce qui correspond à une loi Beta conditionnée et est équivalent au produit

$$Z_{\pi,j-1} \times Beta(\beta + 1, (M-j)\beta).$$

La loi des produits restants est quant à elle donnée par

$$\mathbb{P}(q_{t+1,\ldots,M} \mid \pi, \beta, q_{1,\ldots,t}) \propto \prod_{k=t+1}^{M} q_k^{\beta-1}\mathbb{1}_{\sum_{k=t+1}^{M} q_k = Z_{\pi,t}}, \tag{19}$$

ce qui correspond à une loi de Dirichlet conditionnée équivalente au produit

$$Z_{\pi,t} \times Dir(\beta, \ldots, \beta).$$

Inférence d'un mode contenant n' utilisateurs

Considérons un ensemble de n' utilisateurs associés chacun à une permutation π_i dont on connaît les t_i premiers rangs. Les $M-t$ autres produits sont ordonnés aléatoirement. Cette section démontre que l'algorithme 3 échantillonne $\boldsymbol{q}$ selon la loi de probabilité

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{q} \mid \pi_{1,\ldots,n'}, \beta) = \prod_{i=1}^{n'} \mathbb{P}_{PL}(\pi_i \mid \boldsymbol{q})\mathbb{P}_{Dir}(\boldsymbol{q} \mid \beta),$$

pour $1 < |J| < M$ (la preuve peut être facilement étendue à $|J| = 1$ ou $|J| = M$). À nouveau, les produits qui appartiennent à $\bar{J}$ sont tirés en dernier et suivent une loi de Dirichlet conditionnée qui équivaut au produit

$$\left(1 - \textstyle\sum_{j\in J} q_j\right) \times Dir(\beta, \ldots, \beta)$$

Après factorisation, la loi marginale des poids des produits dans J est proportionnelle à

$$\frac{\prod_{j\in J} {q_j}^{\beta+\nu_j-1}}{\prod_{i=1}^{n'}\prod_{k=1}^{t_i}\left(s+\sum_{\substack{j\in J\\ \pi_i(j)\geqslant k}} q_j\right)} s^{(M-|J|)\beta-1}\mathbb{1}_{s+\sum_{j\in J} q_j=1},$$

où s correspond à $\sum_{j\in \bar{J}Q'_j} = 1-\sum_{j\in J} q_j$.

Comme cette loi ne peut être marginalisée, elle est approchée grâce à la substitution proposée par (Gormley & Murphy, 2009) (Annexe B), qui correspond à un produit de lois Gamma autour des valeurs précédemment échantillonnées. La première étape consiste à approcher $s+\sum_{\substack{j\in J\\ \pi_i(j)\geqslant k}} q_j$ par

$$\left(\bar{s}+\sum_{\substack{j\in J\\ \pi_i(j)\geqslant k}} \bar{q}_j\right)\frac{1}{e}\exp\left(\frac{s+\sum_{\substack{j\in J\\ \pi_i(j)\geqslant k}} q_j}{\bar{s}+\sum_{\substack{j\in J\\ \pi_i(j)\geqslant k}} \bar{q}_j}\right),$$

où la notation $\bar{s}$ et $\bar{\boldsymbol{q}}$ sont les valeurs échantillonnées à l'itération précédente.

La loi marginale de substitution est proportionnelle à

$$\prod_{j\in J} {q_j}^{\beta+\nu_j-1}\exp\left(-q_j\sum_{\substack{(i,k)\\ k\leqslant t_i\\ k\leqslant\pi_i(j)}}\frac{1}{\bar{s}+\sum_{\substack{j'\in J\\ \pi_i(j')\geqslant k}}\bar{q}_{j'}}\right)$$
$$s^{(M-|J|)\beta-1}\exp\left(-s\sum_{\substack{(i,k)\\ k\leqslant t_i}}\frac{1}{\bar{s}+\sum_{\substack{j'\in J\\ \pi_i(j')\geqslant k}}\bar{q}_{j'}}\right)\mathbb{1}_{[s+\sum_{j\in J} q_j=1]}, \quad (20)$$

ce qui correspond à un produit de distributions Gamma de paramètres K et θ calculés par l'algorithme 3. Cette loi de substitution est échantillonnée par un algorithme de Metropolis Hastings en utilisant comme distribution de transition $|J|+1$ lois Gamma indépendantes suivies d'une étape de normalisation.

Références

ANTONIAK C. E. (1974). Mixtures of dirichlet processes with applications to bayesian nonparametric problems. *Annals of Statistics*, **2**(6), 1152–1174.

BUSSE L. M., ORBANZ P. & BUHMANN J. M. (2007). Cluster analysis of heterogeneous rank data. In *ICML'07*, p. 113–120.

FLIGNER M. A. & VERDUCCI J. S. (1986). Distance based ranking models. *J. of the Royal Stat. Soc.*, **48**, 359–369.

GOLDFARB D. & MA S. (2009). Convergence of fixed point continuation algorithms for matrix rank minimization. *CoRR*, **abs/0906.3499**.

GORMLEY I. C. & MURPHY T. B. (2008). A mixture of experts model for rank data with applications in election studies. *Annals of Applied Statistics*, **2**(4), 1452–1477.

GORMLEY I. C. & MURPHY T. B. (2009). A grade of membership model for rank data. *Bayesian Analysis*, **4**(2), 265–296.

GUIVER J. & SNELSON E. (2009). Bayesian inference for plackett-luce ranking models. In *ICML'09*, p. 377–384.

KENDALL M. G. (1938). A new measure of rank correlation. *Biometrika*, **30**(1-2), 81–93.

LEBANON G. & MAO Y. (2008). Non-parametric modeling of partially ranked data. *JMLR*, **9**, 2401–2429.

LUCE R. D. (1959). *Individual choice behavior : A theoretical analysis*. Wiley.

MALLOWS C. L. (1957). Non-null ranking models. i. *Biometrika*, **44**(1-2), 114–130.

MAZUMDER R., HASTIE T. & TIBSHIRANI R. (2010). Spectral regularization algorithms for learning large incomplete matrices. *JMLR*, **99**, 2287–2322.

MEILĂ M. (2007). Comparing clusterings–an information based distance. *J. of Multivariate Analysis*, **98**(5), 873–895.

MEILĂ M. & CHEN H. (2010). Dirichlet process mixtures of generalized mallows models. In *UAI'10*.

NEAL R. M. (2000). Markov chain sampling methods for dirichlet process mixture models. *J. of Computational and Graphical Statistics*, **9**, 249–265.

PLACKETT R. L. (1975). The analysis of permutations. *J. of the Royal Stat. Soc.*, **24**(2), 193–202.

RENNIE J. D. M. & SREBRO N. (2005). Fast maximum margin matrix factorization for collaborative prediction. In *ICML'05*, p. 713–719.

RICHARD E., BASKIOTIS N., EVGENIOU T. & VAYATIS N. (2010). Link discovery using graph feature tracking. In *NIPS'10*, p. 1966–1974.

SREBRO N., RENNIE J. D. M. & JAAKKOLA T. (2004). Maximum-margin matrix factorization. In *NIPS'04*.