Histoire de la transformée de Mellin

Jean-Marie NICOLAS[1], Roland BADEAU[1],

[1]LTCI, Télécom ParisTech, Université Paris-Saclay, 75013, Paris, France
jean-marie.nicolas@telecom-paristech.fr

Résumé – La transformée de Mellin est probablement la transformation intégrale la plus méconnue mais aussi une des plus fondamentales dans de nombreux domaines. Sa genèse a été fort longue, et il est difficile de donner une référence précise de son introduction dans les ouvrages scientifiques. Longtemps réduite à jouer un rôle secondaire vis à vis des transformées de Fourier et de Laplace, il est peut être temps de lui redonner la place qu'elle mérite dans les outils de traitement de signal "modernes".

Abstract – The Mellin transform is probably the most unknown but also one of the most fundamental integral transforms in many domains. Its genesis has been very long, and it is difficult to provide a specific reference of its introduction in the scientific literature. Long reduced to playing a secondary role compared with the Fourier and Laplace transforms, it may be time to give it back the place it deserves in the "modern" signal processing toolbox.

1 Introduction

A l'heure actuelle, la transformée de Mellin fait partie des outils élémentaires de l'analyse moderne. Même s'il n'existe aucune monographie stricto sensu (la transformée de Mellin partage avec la transformée de Laplace le titre de [1], et avec la transformée de Hankel celui de [2]), un certain nombre de bons auteurs la définissent et l'utilisent. Pour toute fonction $f(x)$, définie pour $x \in \mathbb{R}^+$, on associe la fonction $\phi(s)$ avec $s \in \mathbb{C}$, que l'on appellera transformée de Mellin [2, 3] :

$$\phi(s) \;=\; \mathcal{M}\left[f(x)\right](s) \;=\; \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Généralement, cette intégrale (1) ne converge que pour des valeurs de s situées à l'intérieur d'une bande délimitée par deux parallèles à l'axe imaginaire, i.e.

$$s \;=\; s_R + i\omega \quad s_R \in \left]s_{R_1}; s_{R_2}\right[,\; \omega \in \mathbb{R} \tag{2}$$

et on montre que $\phi(s)$ est holomorphe à l'intérieur de cette bande qui porte souvent le nom de bande de définition. Mieux, si l'on exprime s sous la forme $s = c + i\omega$, la convergence de l'intégrale (1) est vérifiée dès lors que cette intégrale existe pour $s = c$ [3]. On dispose aussi une "version Mellin" du théorème de Paley-Wiener montrant si une fonction $\phi(s), s \in \mathbb{C}$ est une transformée de Mellin [3]. Une fois posés les fondements mathématiques de cette catégorie de fonctions analytiques, si $\phi(s)$ est la transformée de Mellin d'une fonction $f(x)$ et que son domaine de définition est la bande du plan complexe $s_R \in]s_{R_1}; s_{R_2}[$, alors pour tout $c \in]s_{R_1}; s_{R_2}[$, on a :

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \phi(s) \mathrm{d}s. \tag{3}$$

Posées sur la base de deux relations assez limpides pour un mathématicien actuel connaissant tant soit peu les arcanes des fonctions analytiques [4], les transformées de Mellin et de Mellin inverse semblent se placer dans la droite ligne des transformées de Fourier et de Laplace, au même titre que d'autres transformations beaucoup moins connues comme la transformée de Hankel, les transformées K et Y ou la transformée de Stieltjes (voir par exemple [5]). Et de même que la convolution est associée à la transformée de Fourier, la convolution de Mellin $\hat{\star}$ se rattache à la transformée de Mellin $\mathcal{M}$ par la définition :

$$\begin{array}{l} r(x) \;=\; p(x) \,\hat{\star}\, q(x) \;=\; \int_0^{\infty} p\left(\frac{x}{y}\right) q(y) \, \frac{\mathrm{d}y}{y} \\ \Leftrightarrow \;\; \mathcal{M}[r] \;=\; \mathcal{M}[p] \, \mathcal{M}[q] \end{array} \tag{4}$$

Néanmoins deux points étranges subsistent. Le premier réside dans la difficulté de trouver dans les articles de la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle l'origine exacte de la paternité de Mellin à la transformation définie par les relations (1) et (3). Le second réside dans le sempiternel second rôle que cette transformation joue face aux incontournables transformées de Laplace et de Fourier. Or, comme le souligne Butzer [6], il est temps de faire jouer un rôle totalement indépendant à la transformée de Mellin, sans la ramener de force à une transformée de Fourier ou de Laplace par changement de variable. Et pour montrer certains aspects fondamentaux de la transformée de Mellin, rappelons qu'une fonction $K(x)$ est un noyau de Fourier si elle vérifie [2] :

$$\begin{array}{l} \phi(z) = \int_0^{\infty} K(yz) f(y) \mathrm{d}y \\ \Leftrightarrow f(y) = \int_0^{\infty} K(yz) \phi(z) \mathrm{d}z. \end{array} \tag{5}$$

Alors la transformée de Mellin de ce noyau, $\kappa(s)$, vérifie : $\kappa(s)\, \kappa(1-s) = 1$. C'est le cas des transformées en cosinus, en sinus, de Hankel . . . .

L'objectif de cet article est donc d'analyser la genèse de la transformée de Mellin, et de voir tout au long du XX$^{\text{ème}}$ siècle quelques domaines d'application dans lesquels elle est devenue incontournable.

2 Les travaux de Mellin

2.1 La fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle et les fonctions hypergéométriques

A la mort de Mellin (1933), Lindelöf, ancien doctorant de Mellin, publie sa nécrologie dans “Acta Mathematica” [7] en donnant une trentaine de références sur les articles de Mellin. Ces articles ont été publiés principalement dans Annales AcademiæScientiarum FennicæMathematica, d'abord en suédois, puis en allemand, ainsi que dans Acta mathematica. Or l'article de Lindelöf s'avère parsemé d'inexactitudes dans sa liste de références : ce sont les références de Lindelöf que l'on retrouve ensuite dans quasiment toutes les publications citant Mellin, avec les mêmes erreurs. Grâce à la numérisation systématique des références, comme les Annales AcademiæScientiarum FennicæMathematica [8], il est possible –avec un peu de patience– de retrouver les bonnes références, et ainsi de se faire une idée plus précise de la démarche de Mellin.

Les premiers articles de Mellin sont parus dans Acta Mathematica en 1883 [9, 10]. Ils témoignent chez ce scientifique d'une grande maîtrise dans les liens entre produits infinis et fonctions Gamma. Ce thème va très vite conduire Mellin à s'intéresser aux fonctions hypergéométriques (la référence [11] a été incontournable dans la première moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle pour tout article traitant des fonctions hypergéométriques). Intégrant dans ses travaux la fonction ζ de Riemann, Mellin semble trouver une certaine plénitude en développant les concepts d'intégrales dans le plan complexe[1] et en associant –enfin– les deux relations définissant la transformée que la postérité a associé à son nom. Ces deux relations se trouvent effectivement dans l'article [11], –mais curieusement à quelques pages d'intervalle– dans le cas particulier de la fonction

$$\phi(s) \ = \ \frac{\Gamma(s-a_1)\ldots\Gamma(s-a_p)}{\Gamma(s-b_1)\ldots\Gamma(s-b_q)} \tag{6}$$

à partir de laquelle Mellin, s'inspirant des travaux de Pincherle, définit une fonction $f(x)$:

$$f(x) \ = \ = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}\frac{\Gamma(s-a_1)\ldots\Gamma(s-a_p)}{\Gamma(s-b_1)\ldots\Gamma(s-b_q)}\mathrm{d}s \tag{7}$$

qui est une fonction hypergéométrique (un scientifique du XXI$^{\text{ème}}$ siècle y verrait simplement un cas particulier de fonction de Meijer [5]). Un autre point incontournable de cet article est la généralisation de cette transformation à des fonctions de deux variables.

Il est curieux de noter que jamais Mellin ne semble avoir écrit un article détaillant dans le cas le plus général “sa” transformation. C'est Hardy qui, dans son article *On Mellin's inversion formula* de 1917 [12] et citant [11], attribue pour la postérité la paternité de la paire de relations (1) et (3) à Mellin. On peut remarquer qu'à cette époque Hardy travaillait en collaboration avec Ramanujan, et que, au final, le théorème maître de Ramanujan s'exprime finalement assez clairement grâce à la transformée de Mellin :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi(k)}{k!}(-x)^k \Leftrightarrow \mathcal{M}[y](s) = \Gamma(s)\phi(s) \tag{8}$$

Mais, très curieusement, c'est la physique théorique qui s'est emparée la première de cet article et de ce nouvel outil avec Fowler [13] en 1921.

2.2 La transformée de Mellin dans la littérature du XX$^{\text{ème}}$ siècle

Il faut attendre le milieu des années 30 pour voir apparaître la transformée de Mellin dans les ouvrages d'analyse [14].

En 1936, Meijer généralise les travaux de Mellin sur les fonctions hypergéométriques aux fonctions dites de Meijer, qui, en hommage à Mellin, ne sont définies qu'implicitement par transformée de Mellin inverse de produits et rapports de fonctions Gamma [5].

A la fin des années 40, Erdélyi, entouré d'un groupe de mathématiciens célèbres (Magnus, Oberhettinger et Tricomi), lança le “Bateman Manuscript Project”, principalement fondé sur les notes du célèbre mathématicien Harry Bateman (1882-1946) [15] et qui déboucha sur 5 volumes incontournables (tables d'un certain nombre de transformations, définition des fonctions transcendantes,. . .). C'est dans un de ces ouvrages [16] que la communauté scientifique trouve pour la première fois des tables de transformées de Mellin (directe et inverse).

La France se distingue en publiant en 1959 un ouvrage partiellement dédié à la transformée de Mellin [2] –mais faisant la part belle à la transformée de Laplace-Abel comme passerelle vers la transformée de Mellin– puis, en 1972, des tables bien plus fournies que celles de Bateman [1].

Il faudra attendre 1974 pour trouver la publication d'une table complète (Oberhettinger [17]) et ce ne sera finalement qu'en 1997 que Butzer [6] –c'est à dire un siècle après les articles fondateurs de Mellin– montre qu'il faut voir la transformée de Mellin comme une transformée à part entière, et non comme une simple variante d'une autre transformée.

3 Les applications de la transformée de Mellin

Il n'est bien évidemment pas possible dans cet article de citer toutes les applications dans lesquelles la transformée de Mellin joue un rôle majeur : en particulier ne seront pas abordées ses utilisations en physique théorique, domaine pourtant pionnier en la matière. Les exemples donnés dans ce paragraphe –qui se cantonnent aux domaines liés au traitement du signal et des images– ne sont qu'illustratifs et montrent d'une certaine manière que le rôle de la transformée de Mellin se place le plus souvent comme une transformée classique (Fourier) ramenée en échelle logarithmique au lieu de lui laisser sa place spécifique.

[1] nécessitant alors l'utilisation de la fonction Gamma définie sur $\mathbb{C}$.

3.1 Traitement du signal et des images

Certains signaux sont naturellement associés à une transformation logarithmique. Sur des signaux de type biologique, Altes utilise donc la transformation de Mellin [18] et, dans un cadre temps-échelle, Escudié [19] utilise une convolution de Mellin. Bertrand et al. [20] unifie la démarche pour les distributions temps-fréquence affines.

Les signaux 2-D sont aussi un vaste domaine d'application de la transformée de Mellin. Suite aux travaux visionnaires de Brousil et Smith [21] qui ont introduit probablement les premiers la transformée de Fourier-Mellin en 1967, c'est peut-être Johnson ([22],1980) qui a été l'un des premiers à l'utiliser en traitement radar. Cette transformation est maintenant un opérateur classique du traitement des images.

Enfin notons les travaux de Brienne [23] dans le domaine de l'automatique puisque la transformée de Mellin a un lien naturel avec l'opérateur $\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

3.2 Modélisation physique

À coté des signaux biologiques, d'autres domaines de modélisation physique peuvent bénéficier d'une approche "à la Mellin". En tissant les liens entre transformée de Mellin et transformée de Lamperti, Borgnat [24] a ouvert de nouvelles voies en turbulence. Et on peut aussi noter que l'atténuation dans les tissus biologiques [25] s'associe à une convolution de Mellin, ce qui permet, par déconvolution de Mellin, d'éliminer les effets de l'atténuation dans les milieux homogènes.

3.3 Modélisation des lois définies sur $\mathbb{R}^+$

En 1947, Epstein jette les bases d'une approche extrêmement prometteuse dédiée aux lois de probabilités définies sur $\mathbb{R}^+$ [26]. Il montre que deux lois opérant de manière multiplicative donnent naissance à une loi qui est simplement la convolution de Mellin des deux lois initiales. Cette idée va mener Springer [27] à développer, à l'aide de logiciels de calcul formel très innovants à l'époque, des outils d'estimation de paramètres de lois de probabilité manifestement très utiles dans son domaine (cet article s'appuie sur un rapport de recherche des *General Motors Defense Research Laboratories* de 1964) et peut être trop visionnaires pour l'époque. Dans le même temps (1959), Paul Lévy [28] propose une esquisse d'une théorie de la multiplication des variables aléatoires, qui fut malheureusement sans suite.

Il fallut attendre la fin des années 90 et les travaux de Badeau [29] et Nicolas [30] pour que la convolution de Mellin reprenne une place majeure dans l'étude des lois de probabilités définies sur $\mathbb{R}^+$. Le concept des "statistiques de Mellin" (appelées aussi statistiques de deuxième espèce) allait pouvoir s'imposer : le remplacement de la transformée de Fourier par la transformée de Mellin pour définir la "fonction caractéristique de deuxième espèce" a permis un cadre théorique [31] solide et riche d'applications. Par exemple, la notion de "log-cumulants" permet de nos jours une technique d'estimation de paramètres de lois beaucoup plus efficace que la traditionnelle méthode des moments, bien adaptée pour des lois définies sur $\mathbb{R}$, mais moins pour des lois définies sur $\mathbb{R}^+$. Notons qu'en économie, et dans une démarche totalement parallèle aux travaux sus-cités, Tagliani [32] s'est fortement appuyé sur la transformée de Mellin dans ses modélisations statistiques, mais sans proposer une définition des "statistiques de Mellin".

En intégrant à ce cadre les fonctions de Meijer [33], les log-statistiques ouvrent définitivement une approche innovante sur les lois définies sur $\mathbb{R}^+$, en particulier dû au fait qu'une primitive d'une fonction de Meijer est une fonction de Meijer (ce qui permet d'avoir une expression analytique de la fonction de répartition) et au fait que des plateformes comme Python ont des outils calculant les fonctions de Meijer.

4 Conclusions

L'histoire de la transformée de Mellin montre comment une approche fondée sur l'étude des fonctions hypergéométriques a pu déboucher sur des techniques innovantes d'analyse et de traitement dans de nombreux domaines scientifiques. Le fait de pouvoir disposer de documents numériques ouvre des portes à des études historiques permettant d'analyser l'évolution des travaux de scientifiques célèbres, mais aussi à découvrir les cloisons qui peuvent encore exister entre certains domaines. Ce serait un défi pour le XXI$^{\text{ème}}$ siècle que de proposer une unification de tous ces travaux et de donner enfin à Mellin un rôle de premier plan dans nos fondamentaux mathématiques.

References

[1] S. Colombo et J. Lavoine. Transformations de Laplace et de Mellin. Dans *Mémorial des sciences mathématiques*. Gauthier-Villars, 1972. Fascicule 169.

[2] S. Colombo. *Les transformations de Mellin et de Hankel.* CNRS éditions, 1959.

[3] R. Godement. *Analyse mathématique III : Fonctions analytiques, différentielles et variétés, surfaces de Riemann.* Springer Verlag, 2002.

[4] H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Hermann, 1961.

[5] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger et F.G. Tricomi. *Bateman manuscript project. Higher transcendental functions : volume I and II.* McGraw-Hill, 1953.

[6] P.L. Butzer et S. Jansche.. « A direct approach to the Mellin transform ». *The journal of Fourier Analysis and Applications*, 3(4), 1997.

[7] E. Lindelöf. « Robert Hjalmar Mellin ». *Acta Mathematica*, 61(1):1–4, 1933. Springer.

[8] http://www.biodiversitylibrary.org.

[9] H.R. MELLIN. « Eine Verallgemeinerung der Gleuchung $\Gamma(1+x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$ ». *Acta Mathematica*, 3:102–104, 1883. Springer.

[10] H.R. MELLIN. « Über Gewisse durch die Gammafunction ausdrückbare unendliche Producte ». *Acta Mathematica*, 3:322–324, 1883. Springer.

[11] H.R. MELLIN. « Om definita integraler, hvilka för obegränsadt växande värden af vissa heltaliga parametrar hafva till gränser hypergeometriska funktioner af särskilda ordningar ». *Annales AcademiæScientiarum FennicæMathematica*, 20, 1895.

[12] G.H. HARDY. « Notes on some points in the integral calculus : On Mellin's inversion formula ». *Messenger of Mathematics*, 47:178–184, 1917-1918.

[13] R. H. FOWLER. « A Simple Extension of Fourier's Integral Theorem and Some Physical Applications, in Particular to the Theory of Quanta ». *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 99(701):462–471, 1921.

[14] E.C. TITCHMARSH. *Introduction to the theory of Fourier Integrals*. Clarendon Press, Oxford, UK, 1937.

[15] A. ERDÉLYI. « Obituary notices of fellows of the royal society ». 5(15), février 1947.

[16] A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER et F.G. TRICOMI. *Bateman manuscript project. Tables of Integral Transforms, Vol 1*. McGraw-Hill, 1954.

[17] F. OBERHETTINGER. *Tables of Mellin Transform*. Springer Verlag, 1974.

[18] R.A. ALTES. « The Fourier-Mellin transform and mammalian hearing ». *Journal of the Acoustical Society of America*, 63:174–183, 1978.

[19] B. ESCUDIÉ et A. GROSSMAN. « Une représentation bilinéaire en temps et en échelle ». Dans *Colloque GRETSI*, pages 33–35, Juan-les-pins, France, 1991.

[20] J. BERTRAND, P. BERTRAND et J. P. OVARLEZ. « *The Transforms and Applications Handbook* », Chapter The Mellin transform. CRC & IEEE Presses, 2000. Ch. 11.

[21] J.K. BROUSIL et D.R. SMITH. « A Threshold Logic Network for Shape Invariance ». *IEEE Transactions on Electronic Computers*, EC-16(6):818–828, décembre 1967.

[22] L.H. JOHNSON. *The Shift and Scale Invariant Fourier-Mellin Transform for Radar Applications*. Massachusetts inst of tech, Lexington Lincoln lab, MA, USA, 1980.

[23] J.P. BRIENNE, D. DUBOIS, L. POVY et H. BAUSSART. « The Mellin transform to control system described by an implicit derivative transmittance ». Dans *UKACC International Conference on control*, Swansea, UK, 1998.

[24] P. BORGNAT. « *Modèles et outils pour les invariances d'échelle brisées: variations sur la transformation de Lamperti et contributions aux modèles statistiques de vortex en turbulence* ». PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, décembre 2002.

[25] M. AUPHAN et J.M. NICOLAS. « Tissue ultrasonic attenuation well modelized by a Mellin convolution ». *Acoustical Imaging*, 12:413–422, 1982. Springer.

[26] B. EPSTEIN. « Some applications of the Mellin transform in statistics ». *Annals of Mathematical Statistics*, 19:370–379, 1948.

[27] M.D. SPRINGER et W.E. THOMPSON. « The distribution of products of independent random variables ». *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 14(3):511–526, mai 1966.

[28] P. LÉVY. « Esquisse d'une théorie de la multiplication des variables aléatoires ». *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 76:59–82, 1959.

[29] R. BADEAU. « Transformation de Mellin : aspects numériques et dérivation fractionnaire. Application aux lois des variables aléatoires positives. ». Rapport Technique ENST99D009, ENST, Paris, France, 1999.

[30] J.M. NICOLAS, A. MARUANI et R. BADEAU. « Les moments d'ordre inférieur : Principes et application au filtrage des images RSO ». Dans *Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle (RFIA)*, Paris, France, janvier 2000.

[31] J.M. NICOLAS. « Introduction aux statistiques de deuxième espèce : applications des logs-moments et des logs-cumulants à l'analyse des lois d'images radar ». *Traitement du signal*, 19(3):139–167, 2002.

[32] A. TAGLIANI. « Recovering a probability density function from its Mellin transform ». *Applied Mathematics and Computation*, 118:151–159, 2001.

[33] J.M. NICOLAS, G. QUIN et B. PINEL-PUYSSÉGUR. « Application des lois de Meijer à l'imagerie RSO (Radar à Synthèse d'Ouverture) : Calcul d'images "multi-vues géométriques" ». Dans *Colloque GRETSI*, Brest, France, septembre 2013.