

Analyse des modes de cordes couplées d'une harpe par une méthode à haute résolution

Jean-Loïc Le Carrou¹, François Gautier¹ et Roland Badeau²

¹ Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine UMR CNRS 6613, Le Mans, France

courriel : {jean-loic.le_carrou, francois.gautier}@univ-le Mans.fr

² Groupe des Écoles des Télécommunications / Télécom Paris / TSI, Paris, France

courriel : roland.badeau@enst.fr

Résumé

La harpe de concert est un instrument de musique composé d'une table d'harmonie, d'une cavité munie d'évents et de 47 cordes. Lorsqu'une corde est jouée, de multiples couplages entre cordes se produisent, donnant lieu à des signaux vibratoires et acoustiques présentant un grand nombre de composantes spectrales, dont les fréquences sont parfois très proches. La séparation de ces composantes peut être réalisée à l'aide d'une méthode à haute résolution : la méthode ESPRIT [1]. Cette méthode permet d'identifier les fréquences et amortissements des différents modes des cordes couplées de l'instrument. Son application à des signaux vibratoires mesurés sur la table d'harmonie d'une harpe de concert, dont certaines cordes ont été amorties, permet l'analyse des phénomènes de vibrations par sympathie caractéristiques de l'instrument.

Introduction

La harpe de concert est un instrument de musique composé de trois éléments acoustiques : la table d'harmonie, la caisse de résonance et les 47 cordes. Lorsqu'une corde est jouée, sa vibration se transmet à la table d'harmonie. Cette vibration donne lieu à un rayonnement acoustique qui, dans une certaine gamme de fréquence, est amplifié par la caisse de résonance. Le son émis par l'instrument s'avère être d'une grande complexité et présente, dans certains cas, des battements, comme cela a été observé sur des signaux de pression acoustique émis par une petite harpe d'Écosse [2]. L'auteur de l'étude montre que ce battement est dû à la présence, dans le signal de pression, de deux fréquences très proches autour de la fréquence fondamentale de la corde jouée. Il explique ce phénomène par un couplage particulier avec la table d'harmonie comme un effet similaire à la note de loup du violoncelle [3]. L'objet de l'étude présentée ici est une investigation du phénomène de battements présent lorsqu'une corde de harpe est jouée afin d'en trouver son origine.

La présence de battements dans le son rayonné par un instrument à cordes peut avoir plusieurs explications physiques. Dans le cas du kantele (instrument traditionnel finlandais à 5 cordes), les phénomènes de battements sont dus aux vibrations de la corde suivant deux directions à des fréquences proches. Ces deux fréquences sont liées au fait que le système d'accrochage des cordes induit une longueur utile dépendante de la direction de vibration [5]. Dans le cas du piano, les battements sont

occasionnés par une superposition de modes de cordes couplées lorsque le marteau frappe un doublet ou triplet de cordes. Ces modes ont des fréquences très proches liées au couplage particulier des cordes au chevalet [4]. La présence de battements dans le son rayonné peut aussi venir des vibrations par sympathie : si une corde est excitée, d'autres le sont aussi par couplage solidien via le corps de l'instrument. L'étude du schéma modal d'un instrument à cordes générique a permis de mettre en évidence la présence de *modes sympathiques*. Dans certains cas d'accord entre cordes, ils peuvent apparaître par paires à des fréquences très proches avec un déphasage relatif entre les cordes [6].

Dans le cas de la harpe, lorsque certaines cordes sont jouées, il n'est pas rare de voir d'autres cordes se mettre à vibrer. Il semble donc que les *modes sympathiques* soient à l'origine des battements dans le son rayonné. Pour confirmer cette explication, un protocole expérimental est mis en place dans ce papier. Les mesures sont ensuite traitées à l'aide de deux méthodes : une méthode spectrale et une méthode à haute résolution permettant de conclure quant à l'origine de ces phénomènes.

Protocole expérimental

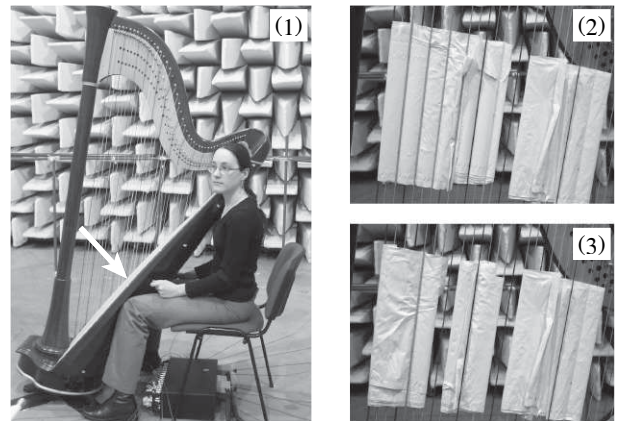
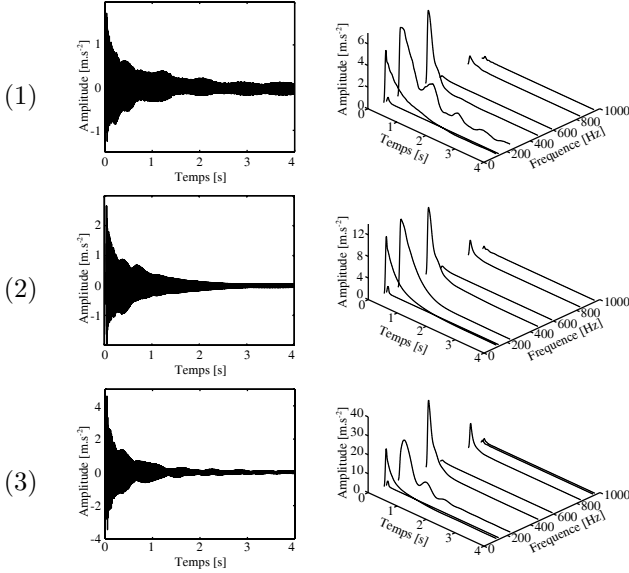


Fig. 1: Protocole expérimental présentant les trois configurations d'étude : (1) toutes les cordes libres, (2) la corde 31 libre et les autres cordes étouffées et (3) les cordes 31 et 38 libres et les autres cordes étouffées. La flèche indique l'endroit où l'accéléromètre est fixé à l'arrière de la table d'harmonie.

Pour étudier les différents couplages existant entre les cordes, le protocole expérimental suivant a été mis en place : la harpe est jouée par une harpiste professionnelle tandis qu'un signal d'accélération est mesuré sur la table

d'harmonie entre les cordes de Ré2 et de Do2, notées respectivement 30 et 31 (voir Figure 1). Les signaux mesurés sont échantillonnés à 8192 Hz et ont une durée de 4 s. La corde jouée est la corde 31 de fréquence fondamentale approximative 120 Hz. Les autres cordes sont soit (1) laissées libres, soit (2) étouffées ou soit (3) partiellement étouffées. Dans ce dernier cas, seule la corde 31 et son octave inférieure, correspondant à la corde 38, sont laissées libres. La représentation temporelle des mesures effectuées suivant ce protocole est présentée dans le tableau 1.



Tab. 1: Représentations temporelle et temps-fréquence des signaux obtenus dans les trois configurations d'étude : (1) toutes les cordes libres, (2) la corde 31 libre et les autres cordes étouffées et (3) les cordes 31 et 38 libres et les autres cordes étouffées.

Traitement du Signal

Méthode temps-fréquence

Les signaux mesurés sur la table d'harmonie sont traités, dans un premier temps, à l'aide d'une méthode temps-fréquence. Pour mener à bien cette étude, les signaux sont filtrés à l'aide d'un filtre passe-bas, de fréquence de coupure 1640 Hz, et décimés à 2048 Hz. La transformée de Fourier à court terme,

$$TFCT_{s,h}(t, f) = \int s(u)h^*(u-t)e^{-j2\pi fu}du, \quad (1)$$

du signal s peut ainsi être calculée. La fenêtre glissante h employée est une fenêtre de Hanning de largeur égale à 8 fois la période de la composante fréquentielle la plus basse du signal.

Les représentations temps-fréquence obtenues suivant les 3 configurations sont montrées dans le tableau 1. Au vu de ces résultats, l'évolution des composantes spectrales au cours du temps est différente suivant les partiels. Dans toutes les configurations, le premier et le troisième partial présentent une décroissance exponentielle avec le temps.

Pour le deuxième partial, en revanche, une modulation d'amplitude particulièrement marquée, d'une période approximative de 0,8 s, est présente lorsque la corde 38 est libre (configurations (1) et (3)) alors qu'elle n'apparaît pas lorsque cette corde est étouffée (configuration (2)). Cette modulation traduit le fait que plusieurs composantes sont présentes et non résolues dans ce partial. En effet, elles ne peuvent pas être identifiées à cause de la résolution fréquentielle de la méthode d'analyse employée.

Méthode à haute résolution

Pour séparer les composantes présentes dans le partial 2, une méthode à haute résolution peut être employée : la méthode ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) [1]. Cette méthode, utilisée avec succès pour traiter des signaux musicaux [7, 8, 9], permet d'estimer les paramètres d'un modèle de signal, $x[t]$, l'ESM (Exponential Sinusoidal Model),

$$x[t] = \sum_{k=1}^K a_k e^{\delta_k t} e^{i(2\pi f_k t + \phi_k)}, t = [1, N] \quad (2)$$

où à chaque fréquence $f_k \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est associée une amplitude réelle $a_k > 0$, une phase $\phi_k \in [-\pi, \pi]$ et un facteur d'amortissement $\delta_k \in \mathbb{R}$. Le paramètre K est le nombre de sinusoides présentes dans le signal. En définissant les amplitudes complexes $\alpha_k = a_k e^{i\phi_k}$ et les pôles complexes $z_k = e^{\delta_k + i2\pi f_k}$, le modèle de signal $x[t]$ se réécrit sous la forme

$$x[t] = \sum_{k=1}^K \alpha_k z_k^t. \quad (3)$$

La méthode ESPRIT consiste à analyser le signal mesuré s en utilisant un espace signal de dimension K et des vecteurs de données de longueur n avec $n > K$. On établit que le paramètre n est optimum lorsqu'il est égal au tiers du nombre total d'échantillons du signal N ou lorsque $n = 2N/3$ [8]. Pour déterminer les pôles complexes z_k , il faut, dans un premier temps, estimer la matrice de corrélation du signal mesuré s , définie comme suit :

$$\hat{\mathbf{R}}_{ss} = \frac{1}{N-n+1} \mathbf{S} \mathbf{S}^H, \quad (4)$$

où $\mathbf{S}$ désigne la matrice de Hankel de dimension $n \times (N-n+1)$ contenant les N échantillons successifs du signal et où l'exposant H représente le conjugué hermitien. Ensuite, une base $\mathbf{W}$ de dimension $n \times K$ de l'espace signal, défini comme l'espace propre principal de $\hat{\mathbf{R}}_{ss}$, peut-être déterminée en diagonalisant cette matrice. La méthode ESPRIT s'appuie sur une propriété particulière de l'espace signal : l'invariance par décalage de lignes. Cette propriété permet de déterminer les pôles du signal comme valeurs propres de la matrice Φ ,

$$\Phi = \mathbf{W}_\downarrow^+ \mathbf{W}_\uparrow, \quad (5)$$

où $\mathbf{W}_\downarrow$ et $\mathbf{W}_\uparrow$ sont respectivement les matrices extraites de $\mathbf{W}$ obtenues en supprimant la dernière ligne et la première ligne. Le symbole $+$ désigne l'opérateur de pseudo inversion.

Dans un second temps, les amplitudes complexes α_k des sinusoides, groupées dans un vecteur noté α peuvent être obtenues grâce à la méthode des moindres carrés :

$$\alpha = \mathbf{V}^+ s. \quad (6)$$

Dans l'Eq. 6, s désigne le vecteur des N échantillons successifs du signal et $\mathbf{V}$ est la matrice de Vandermonde de dimensions $N \times K$ définie à partir des pôles estimés à l'aide de la méthode ESPRIT. On en déduit alors $a_k = |\alpha_k|$ et $\phi_k = \text{phase}(\alpha_k)$.

La principale difficulté de la méthode réside dans l'évaluation du nombre K de composantes présentes dans le signal. La méthode couramment employée est de surestimer ce nombre et de discriminer les résultats aberrants. Dans notre étude, deux méthodes sont utilisées pour déterminer K . La première méthode consiste à déterminer l'énergie de chaque composante trouvée à l'aide de la méthode ESPRIT et de ne retenir que les composantes ayant une énergie supérieure à un seuil arbitrairement choisi. Ce seuil, qui constitue un critère de sélection des composantes significatives, est fixé de façon empirique à 20 dB en dessous de la composante la plus énergétique [9]. La deuxième méthode est l'application de l'indicateur ESTER (ESTimation ERror) [10]. Cet indicateur est basé sur le calcul d'une fonction d'erreur inverse,

$$J : p \mapsto \frac{1}{\|\mathbf{E}(p)\|_2^2} \quad (7)$$

où

$$\mathbf{E}(p) = \mathbf{W}_\uparrow(p) - \mathbf{W}_\downarrow(p)\Phi(p), \quad (8)$$

et où p est le nombre de composantes principales introduites dans l'algorithme. Pour déterminer la valeur de K la méthode consiste à sélectionner la plus grande valeur de p pour laquelle la fonction $J(p)$ est supérieure à un certain seuil choisi de façon arbitraire.

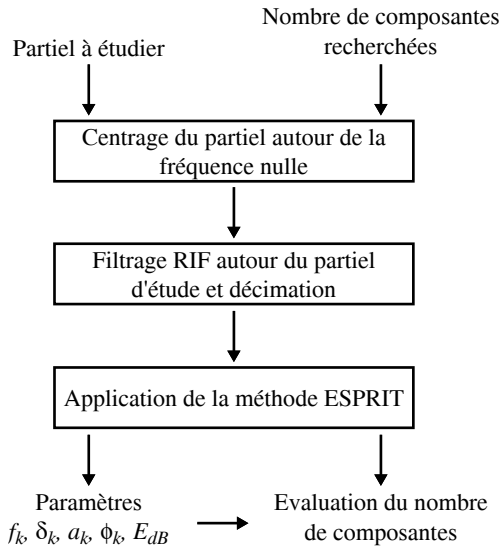


Fig. 2: Procédure de mise en oeuvre de la méthode ESPRIT autour du partiel d'étude.

Pour limiter le temps de calcul et augmenter la précision des résultats [7], la mise en oeuvre de la méthode ESPRIT est effectuée en suivant la procédure décrite dans

	f_k [Hz]	δ_k [s ⁻¹]	a_k [m.s ⁻²]	ϕ_k [Rad]	E_{dB} [dB]
(1)	241,10	-0,40	0,271	-2,28	0
	242,23	-0,45	0,076	-2,8	-11,48
	240,77	-0,18	0,020	-1,8	-20,31
	241,52	-0,59	0,019	2,5	-24,81
	243,73	-0,42	0,013	-1,1	-26,61
(2)	243,29	-0,47	0,013	-2,8	-26,97
	240,73	-2,57	0,56	2,40	0
	240,33	-0,90	0,25	-1,81	-1,95
(3)	241,83	-2,84	0,016	1,49	-31,54
	240,71	-1,64	0,55	-1,63	0
	242,11	-0,38	0,15	-2,28	-4,73
	240,41	-0,86	0,18	-0,51	-6,68
	241,06	-6,11	0,54	2,66	-7,00
	239,83	-2,25	0,06	-2,70	-20,30

Tab. 2: Résultats obtenus par la méthode ESPRIT appliquée sur le partiel 2 des signaux d'accélération mesurés sur la harpe suivant les 3 configurations d'étude : (1) toutes les cordes libres, (2) la corde 31 libre et les autres cordes étouffées et (3) les cordes 31 et 38 libres et les autres cordes étouffées.

la figure 2 : après centrage du partiel d'étude autour de la fréquence nulle, un filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) sélectionne la bande fréquentielle contenant le partiel à analyser. Le signal filtré et centré peut être décimé de façon importante limitant ainsi le temps de calcul des paramètres par la méthode ESPRIT. Il est à noter que le modèle signal n'a de sens que dans la phase d'oscillation libre de la corde, c'est à dire après le transitoire d'attaque.

Application aux sons de la harpe

Pour chaque configuration (1), (2) ou (3), une dizaine de composantes sont recherchées. Dans le tableau 2 ont été reportées les caractéristiques des composantes dont les énergies sont supérieures à -30 dB. Il apparaît clairement que le nombre de composantes présentes dans le partiel 2 est différent suivant la configuration d'étude, confortant ainsi les résultats préliminaires obtenus précédemment. En effet, la méthode consistant à dénombrer les composantes ayant une énergie supérieure à -20 dB permet de discriminer clairement 2 composantes pour la configuration (2) et 4 composantes pour la configuration (3). Par contre, le résultat est plus ambigu pour la configuration (1), de 2 à 5 composantes. Avec l'utilisation de l'indicateur ESTER, cette ambiguïté peut être levée. En effet, dans la figure 3 a été reportée le calcul de la fonction d'erreur inverse Eq. 7 pour la configuration (1). En appliquant la méthode de recherche explicitée précédemment, nous en déduisons les résultats suivants :

- Configuration (1) : 4 composantes ;
- Configuration (2) : 2 composantes ;
- Configuration (3) : 4 composantes.

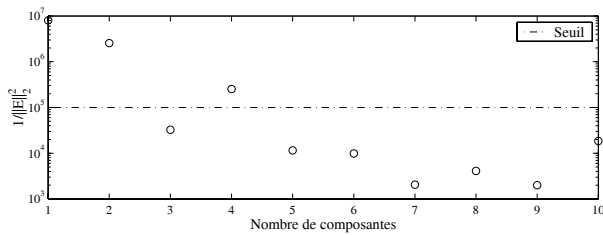


Fig. 3: Calcul de l'indicateur ESTER pour la configuration (1) où toutes les cordes sont libres.

Discussion

Lorsqu'une seule corde de la harpe est libre d'osciller, deux signaux sinusoïdaux ont été identifiés dans le partiel 2. Ces deux sinusoïdes ont des fréquences très proches, séparées de 0,4 Hz, mais des amortissements et des amplitudes bien différents. En effet, une des composantes a une grande amplitude et un amortissement important tandis que l'autre a une amplitude et un amortissement plus faibles. Ce phénomène est semblable à celui de la corde de piano lorsque les autres cordes d'un même doublet ou triplet sont étouffées [4]. Son explication vient du fait que la vibration de la corde s'opère selon deux directions, encore appelées polarisations. Ces deux polarisations sont excitées par l'instrumentiste de façon différente suivant la manière dont la corde est pincée, entraînant des amplitudes initiales a_k différentes. De plus, comme pour le piano, une des polarisations est privilégiée pour transmettre son énergie à la table d'harmonie impliquant une forte décroissance à l'attaque de la note.

Dans le cas où la corde 31 est pincée et où son octave inférieure est libre d'osciller, quatre composantes sont présentes dans le partiel 2. Deux des composantes trouvées ont une amplitude et un amortissement plus importants que les deux autres (voir tableau 2). Chaque polarisation donne donc lieu à deux modes de cordes couplées appelés *modes sympathiques* [6]. Les fréquences de ces modes couplés sont proches en fréquences : 240,71 Hz et 241,06 Hz, pour la polarisation avec un fort amortissement, et 242,11 Hz et 240,41 Hz, pour la polarisation avec un faible amortissement. Dans le cas étudié, le mode 2 de la corde 31 semble *sympathiser* avec le mode 4 de la corde 38 et ceci pour chaque polarisation. Lorsque la harpe est dans la configuration normale de jeu (toutes cordes libres) quatre composantes existent dans le partiel 2. Des *modes sympathiques* semblent donc exister mais, du fait de la présence d'un grand nombre de cordes, l'identification des cordes impliquées dans le couplage est plus difficile. Un autre protocole expérimental basé, par exemple, sur un désaccord contrôlé des cordes pourra être mis en place pour effectuer cette identification.

Conclusion

Dans cet article, l'identification des modes de cordes couplées suivant trois configurations – (1) toutes les cordes libres, (2) la corde 31 libre et les autres cordes étouffées et (3) les cordes 31 et 38 libres et les autres

cordes étouffées – a été menée. Une méthode à haute résolution, la méthode ESPRIT, a permis d'obtenir les paramètres des composantes présentes dans le partiel 2 des signaux mesurés. Le nombre de modes a ensuite été obtenu grâce à l'étude conjointe de l'énergie des composantes trouvées et de l'indicateur ESTER. Lorsqu'une seule corde est libre, deux modes sont présents et correspondent aux deux polarisations de la corde. Lorsque des couplages avec d'autres cordes sont permis, quatre modes sont identifiés. Ces modes correspondent à deux paires de *modes sympathiques* associés à chaque polarisation de la corde. Cependant, l'identification des cordes couplées à la corde jouée est délicate dans le cas où aucune corde n'est étouffée. En plus d'un nouveau protocole expérimental, un modèle décrivant la table d'harmonie comme une poutre équivalente connectée à N cordes pourra permettre d'effectuer cette identification en examinant la base modale obtenue.

Remerciement

Les auteurs remercient le CNRS et la région des Pays de la Loire pour le financement de la thèse de J-L. Le Carrou, la société CAMAC Harps pour le prêt d'une harpe de concert ainsi que Cécile Thomas, harpiste, pour son aide précieuse dans cette étude.

Références

- [1] R. Roy, A. Paulraj & T. Kailath. ESPRIT - A subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise, IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing **34(4)** (1986), 1340-1344.
- [2] I. M. Firth. On the acoustics of the harp. Acustica **37** (1977), 148-154.
- [3] I. M. Firth & J. M. Buchanan. The wolf in the cello. J. Acoust. Soc. Am. **53** (1973), 457-463.
- [4] F. Weinreich. Coupled piano strings. J. Acoust. Soc. Am. **62(6)** (1977), 1474-1484.
- [5] C. Erkut, M. Karjalainen, P. Huang & V. Välimäki. Acoustical analysis and model-based sound synthesis of the kantele. J. Acoust. Soc. Am. **114(2)** (2002), 1681-1691.
- [6] J-L. Le Carrou, F. Gautier, N. Dauchez & J. Gilbert. Modelling of sympathetic string vibrations. Acta Acustica united with Acustica **91(2)** (2005), 277-288.
- [7] R. Badeau. Méthodes à haute résolution pour l'estimation et le suivi de sinusoïdes modulées. Thèse de Doctorat de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications, 2005.
- [8] J. Laroche, The use of the matrix pencil method for the spectrum analysis of musical signals. J. Acoust. Soc. Am. **94(4)**, 1958-1965 (1993).
- [9] B. David. Caractérisations acoustiques de structures vibrantes par mise en atmosphère raréfiée. Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6, 1999.
- [10] R. Badeau, B. David & Gaël Richard. A new perturbation analysis for signal enumeration in rotational invariance techniques. IEEE Transactions on Signal Processing **54(2)** (2006), 450-458.