

# De l'ambiguïté des écritures fractionnaires : Comment interpréter l'expression $D/W$ dans la loi de Fitts ?

Yves Guiard

Laboratoire mouvement et perception  
CNRS et Université de la Méditerranée  
Marseille, France  
yves.guiard@univmed.fr

## RESUME

Il existe deux interprétations théoriques mutuellement exclusives de l'expression fractionnaire  $D/W$  qui figure dans la loi de Fitts. On peut y voir soit une entité théorique, celle représentée par le quotient de la division effectuée de  $D$  par  $W$ , soit deux entités théoriques, celles que représentent  $D$  et  $W$ , les opérands de la possible division. L'article discute les conséquences théoriques et empiriques entraînées dans l'étude de la loi de Fitts par la confusion usuelle entre ces deux interprétations.

**MOTS CLES** Loi de Fitts, méthodologie expérimentale, théorie, épistémologie.

## ABSTRACT

Fractional expression  $D/W$  in Fitts' law can be understood theoretically in two mutually exclusive ways. In  $D/W$  one can view either a single theoretical entity represented by the quotient of the division of  $D$  by  $W$  (assumed to have been done), or two theoretical entities represented by  $D$  and  $W$ , the operands of the doable (but undone) division. The paper discusses the theoretical and empirical consequences of the usual failure to distinguish these two understandings in Fitts' law research.

**CATEGORIES AND SUBJECT DESCRIPTORS** H.5.2. [User Interfaces]: Interaction styles; I.3.6. [Methodology and Techniques]: Interaction techniques.

**GENERAL TERMS** Experimentation

**KEYWORDS** Fitts' law, experimental method, theory, epistemology.

## INTRODUCTION

La loi du pointage de Fitts [1] fait dépendre le temps  $T$  minimal nécessaire pour atteindre une cible de deux longueurs colinéaires, la distance  $D$  à couvrir et la largeur

$W$  de la cible:

$$T = a * \log_2(D/W+1) + b. \quad (1)$$

Le terme  $\log_2(D/W+1)$  constitue l'indice de difficulté ( $ID$ ) du pointage,  $a$  et  $b$  étant des coefficients ajustables [4]. Ainsi cette loi est de la forme

$$T = f(D/W) \quad (2)$$

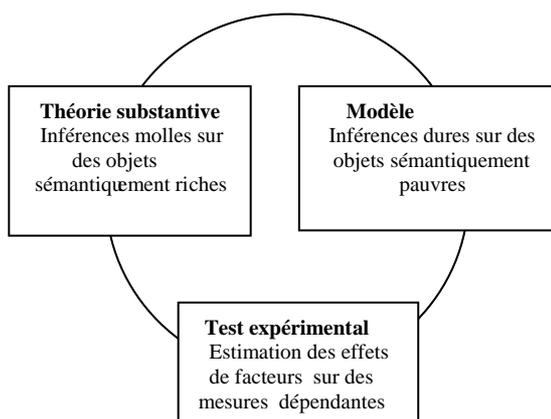
Où  $f$  signifie « est une fonction de ».

## UNE ANOMALIE DANS LE PARADIGME DE FITTS

Depuis l'article princeps de Fitts [1], les études sur le sujet présentent un décalage surprenant entre théorie et manipulation expérimentale. Pour identifier cette anomalie, il nous faut préalablement distinguer trois sphères d'activité propres à la science empirique.

### Théorie substantive, modèle calculatoire, manipulations et mesures empiriques

L'équation 2, un formalisme mathématique qui ne met en relation que des symboles vides, doit se comprendre non seulement en relation avec les hypothèses de la théorie substantive [5] mais aussi avec les manipulations expérimentales (Fig. 1).



**Fig. 1** Les trois sphères de la science empirique : théorie substantive, modèle formel, pratique expérimentale.

La théorie substantive met en scène des objets sémantiquement riches, mais elle ne peut faire que des inférences 'molles'. Le modèle formel, au contraire, permet de réaliser des inférences dures—du calcul—sur des objets qui, s'ils sont rigoureusement définis (notamment au

Permission to make digital or hard copies of all or part of this work for personal or classroom use is granted without fee provided that copies are not made or distributed for profit or commercial advantage and that copies bear this notice and the full citation on the first page. To copy otherwise, or republish, to post on servers or to redistribute to lists, requires prior specific permission and/or a fee.

plan de la mesure :  $T$ ,  $D$  et  $W$  sont des variables continues mesurées sur une échelle de rapport), sont en revanche dénués de substance sémantique. C'est pourquoi l'étude théorique d'un problème requiert un incessant aller et retour entre le modèle formel et la théorie substantive. Mais le modèle formel doit s'interpréter également en relation avec l'expérimentation, où les variables, définies opérationnellement, deviennent des facteurs (à manipuler ou à fixer) et des mesures à enregistrer. Le problème central dans cette troisième sphère d'activité est la construction de plans d'expérience permettant d'isoler les influences respectives des facteurs sur les mesures.

### Une erreur dans le paradigme de Fitts

Les objets identifiés dans les trois sphères de la Fig. 1 doivent se correspondre. Par exemple, la question théorique posée dans l'étude fameuse de Hick [2] est celle de la dépendance du temps de réaction par rapport à la quantité d'information : cette quantité apparaît, logiquement, comme un facteur explicite du plan d'expérience de Hick. L'idée de Fitts est aussi celle d'un temps fonction d'une quantité d'information (capturée formellement par son  $ID$ ). Il faut donc comprendre l'Eq. 1 (et l'Eq. 2) comme liant  $T$  à une grandeur causale sans dimension, mesurée en bits, grandeur que l'on s'attend donc à voir figurer dans le plan d'expérience de Fitts. Or—et telle est l'anomalie—c'est  $D$  et  $W$ , deux longueurs élémentaires auxquelles la théorie n'attribue aucune importance intrinsèque, que le plan de Fitts balance scrupuleusement.

Le plan expérimental de Fitts [1] (Exp. 2) croise quatre niveaux de  $D$  (de 10.16 cm à 81.28 cm) avec quatre niveaux de  $W$  (de 0.16 cm à 1.28 cm). En reclassant selon le rapport  $D/W$  les 16 conditions obtenues, on voit certes réapparaître la variable qui nous intéresse, l' $ID$ , mais on ne dispose d'aucune des garanties qu'aurait offertes un plan manipulant—balançant—l' $ID$  comme un facteur explicite. Si l'hypothèse centrale de Fitts est juste (le rapport  $D/W$ , dont dépend l' $ID$ , est bien la grandeur critique de son paradigme), alors son plan d'expérience, qui ne manipule pas cette grandeur comme facteur, est problématique. Il est en effet impossible d'isoler expérimentalement l'influence d'un rapport  $n/d$  sur une mesure dans un plan qui croise orthogonalement les facteurs  $n$  et  $d$ . Si l'on admet, avec Fitts, que l'effet crucial à évaluer empiriquement est celui de l' $ID$ , alors son plan est défectueux : il ne garantit aucunement que la mesure de cet effet ne sera pas contaminée par les effets de  $D$  et/ou de  $W$ .

Examinons ce plan. En même temps que l'on fait intentionnellement progresser l' $ID$  de 4 à 10 bits (une augmentation d'un facteur 2,5), la valeur moyenne de  $D$  progresse inopinément de 10.16 cm à 81.28 cm, donc d'un facteur 8 (Fig. 2, en haut). La confusion factorielle n'est pas moins spectaculaire entre l' $ID$  et  $W$ . Quand

l' $ID$  couvre sa propre gamme de variation, la moyenne de  $W$  se réduit en même temps d'un facteur 8, passant de 1,28 cm à 0,16 cm (Fig. 2, en bas). A quel facteur dès lors attribuer l'effet observé sur la mesure de  $T$  ? à l' $ID$ , cette variable sans dimension dont la théorie affirme l'importance, ou bien à la distance absolue  $D$  (en cm) à parcourir, ou bien encore à la largeur absolue de la cible  $W$  (en cm) ? Le plan d'expérience de Fitts ne permet pas de trancher empiriquement. Pour comprendre d'où vient une telle erreur de planification expérimentale, un moment de réflexion s'impose sur la signification d'une expression fractionnaire comme  $D/W$ .

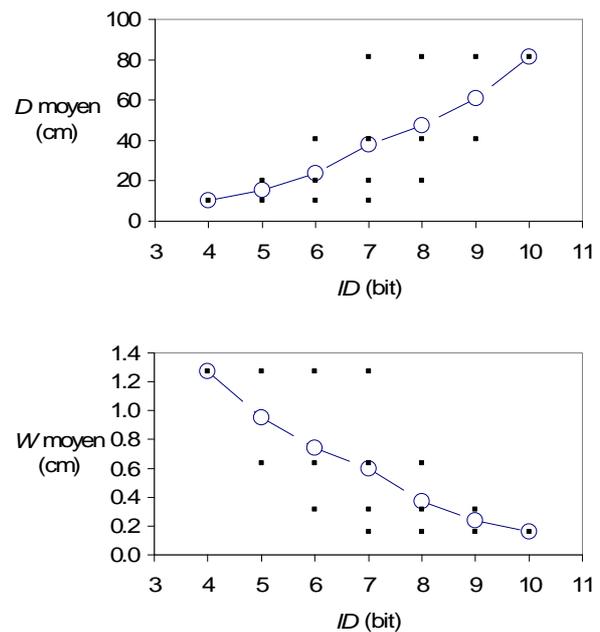


Fig. 2 Confusion factorielle (co-variation) de l' $ID$  avec la distance moyenne (en haut) et avec la tolérance moyenne (en bas) dans l'étude de Fitts [1] (Exp. 2). Les carrés noir identifient les 16 cellules du plan de Fitts. Les cercles vides représentent, pour chaque niveau d' $ID$ , le niveau moyen de la variable parasite ( $D$  en haut et  $W$  en bas).

### CARACTERE EQUIVOQUE DE L'EXPRESSION FRACTIONNAIRE $D/W$

Combien d'entités faut-il discerner dans le membre droit de l'Eq. 2 ? Il y a deux réponses possibles. Ou bien l'équation signifie  $T = f(D, W)$ , donc  $T$  dépend de deux grandeurs, le numérateur et le dénominateur de l'expression  $D/W$  ; ou bien elle signifie  $T = f(Q)$ , où  $Q$  est un seul nombre, le quotient de la division de  $D$  par  $W$ . La première interprétation, que plus bas j'appellerai *Cartésienne*, voit dans l'expression  $D/W$  les deux opérandes d'une division possible mais non effectuée. La seconde, que j'appellerai *polaire*, y voit le résultat de la division de  $D$  par  $W$ , supposée effectuée.

Une telle distinction pourrait sembler oiseuse, l'expression  $D/W$  et son quotient  $Q$  étant équivalents du point de vue calculatoire. Mais une équivalence n'est pas

une identité et le calcul n'est qu'un composant du paradigme : gardons à l'esprit qu'à un réel  $Q$  donné correspondent une infinité de fractions  $D/W$  (par exemple, 0.5 est équivalent à 1/2, 2/4, 10/20, etc.).

### Spécification cartésienne vs. polaire d'un point

L'interprétation cartésienne ou polaire d'une expression fractionnaire  $n/d$  de numérateur  $n$  et de dénominateur  $d$  peut se définir aisément avec une analogie géométrique.

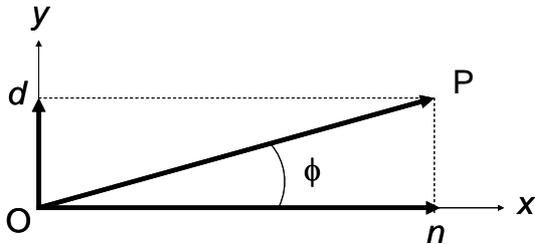


Fig. 3 Spécifications cartésienne et polaire des deux coordonnées d'un point P dans un plan  $xy$ .

On localise un point P dans un plan  $xy$  en indiquant soit ses deux coordonnées *cartésiennes* soit ses deux coordonnées *polaire*s. Dans le premier cas on donne la norme des deux vecteurs composants  $\overline{On}$  et  $\overline{Od}$ . Dans le second on exploite le vecteur résultant  $\overline{OP}$ , dont on donne l'orientation  $\phi$  et la norme  $\sqrt{n^2 + d^2}$ . Ici on spécifie les côtés du rectangle  $OdPn$ , qui sont toutes deux des longueurs absolues, dimensionnellement en m, là on spécifie la *forme* du rectangle, quantifiée par une longueur relative sans dimension (un rapport d'aspect), en précisant d'autre part l'*échelle* de ladite forme, quantifiée par  $\sqrt{n^2 + d^2}$  ou par une quelconque autre mesure de longueur (comme  $n$ ,  $d$ , ou  $n+d$ ). Chacune des deux spécifications étant complète, la description cartésienne et la description polaire sont mutuellement exclusives, sans possibilité d'hybridation—le problème est à *deux* nombres seulement.

### Lecture cartésienne vs. polaire de l'expression $D/W$

Interprétée dans le sens cartésien, l'expression  $D/W$  de l'Eq. 2 met en jeu d'une part la distance  $D$  à couvrir et d'autre part la tolérance  $W$  offerte au pointage. Admettre cette interprétation du formalisme, à la manière d'un Woodworth [7], exclut logiquement que l'on puisse invoquer le rapport  $D/W$ —la 'forme' de l'expression fractionnaire—ni comme entité causale de la théorie substantive ni comme facteur expérimental.

Si, alternativement, on prend l'expression  $D/W$  de l'Eq. 2 au sens polaire, alors l'Eq. 2 nous dit que le temps  $T$  est déterminé par la forme (le rapport d'aspect  $D/W$ ) de la tâche de pointage considérée<sup>1</sup>. Se pose alors la ques-

<sup>1</sup> Dans la tâche de Fitts, on peut parfaitement voir une *figure* unidimensionnelle dans le tripoint défini par le point de départ du mouvement et les deux limites de la cible. Le quotient  $D/W$  représente alors le rapport d'aspect spécifiant la *forme* de ladite figure.

tion complémentaire de l'échelle de la tâche (que l'on spécifiera en donnant une quelconque mesure de longueur), mais il n'est plus question de raisonner, dans les sphères théorique et expérimentale, sur les rôles respectifs de  $D$  et de  $W$ , deux entités qui ne peuvent pas être définies.

### Manipuler deux variables dont le rapport est influent : Une expérience de pensée

Dans une discussion éclairante sur l'art d'optimiser les interfaces Norman [6] a utilisé l'exemple des installations de douche. La Fig. 4 schématise deux installations bien connues : à gauche le vieux système des deux robinets montés sur les arrivées d'eau froide et d'eau chaude ; à droite le système plus récent permettant de contrôler la température et le débit de l'eau à la sortie de l'installation. Le nouveau montage, explique Norman, est préférable parce qu'il permet le contrôle des variables qui sont compréhensibles pour l'utilisateur.

Imaginons une expérience visant à établir la relation liant la satisfaction de l'utilisateur de la douche aux variables impliquées dans la Fig. 4. Pour manipuler les états de la douche, nous avons à notre disposition les quatre descripteurs correspondant aux quatre robinets de la Fig. 4. Quels robinets (quels facteurs) faire varier dans notre plan d'expérience pour mettre en évidence la loi de satisfaction, sachant que deux robinets suffisent ?

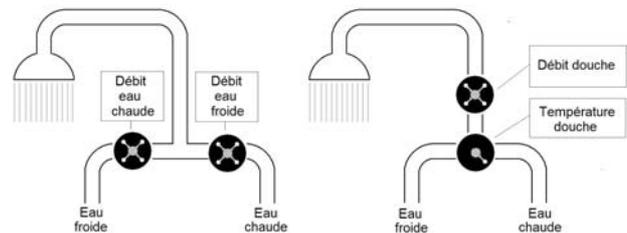


Fig. 4 Contrôle cartésien (à gauche) et polaire (à droite) des deux degrés de liberté d'une douche.

Le problème est similaire à celui de Fitts, une fois les longueurs (m) remplacées par des débits ( $m^3/s$ ). Nous pouvons imaginer une théorie et un plan d'expérience du type cartésien donnant aux deux débits d'entrée le statut d'entités théoriques et de facteurs expérimentaux. Mais sans hésiter notre théorie sera polaire car, renseignements pris auprès du physicien et du physiologiste, c'est évidemment en raisonnant sur la température de sortie de la douche (une mesure relative, sans dimension, déterminée par la balance des débits) et sur le débit de sortie (une mesure d'échelle) que nous pourrions comprendre la situation. Nous pouvons sans grand risque prédire une relation à optimum entre la satisfaction de l'utilisateur et la température de sortie de la douche (relation dont on peut présumer qu'elle sera modulée par le débit).

La contribution théorique décisive de Fitts a sans doute été de déceler un agent causal dans le quotient sans di-

mension de la division de  $D$  par  $W$ . Dans cette expérience de pensée nous théoriserons également notre problème en termes d'un quotient (la balance des débits). Toutefois, pour rester dans une logique polaire cohérente, nous adopterons l'échelle (une mesure brute de débit) comme entité théorique complémentaire. Et surtout nous utiliserons un plan d'expérience compatible avec notre théorie : nous croiserons, non pas les deux débits d'entrée, mais la température et le débit de sortie.

## CONSEQUENCES DE L'ERREUR DE METHODE

### Des estimations expérimentales biaisées

Revenant à Fitts, voyons dans ses propres données les dommages causés par son adoption d'un plan cartésien alors que sa théorie affirme, à juste titre, que l'Eq. 2 doit être comprise au sens polaire. La Fig. 5 présente selon la logique polaire (i.e. avec l' $ID$  en abscisse et l'échelle en paramètre) les données que Fitts [1] a obtenues dans son Exp. 2 avec une tâche de transfert de disques. L'effet de l' $ID$  est massif, mais visiblement le facteur d'échelle ( $D$ ) a lui aussi influencé la variable dépendante :  $T$  s'accroît systématiquement avec l'échelle. Si, négligeant cette confusion factorielle, on calcule la régression linéaire de  $T$  par rapport à l' $ID$  sur l'ensemble des points—comme Fitts l'a toujours fait et comme on continue de le faire aujourd'hui—on obtient l'équation  $T = 90 ID + 150$  ms (le trait continu dans la Fig. 5).

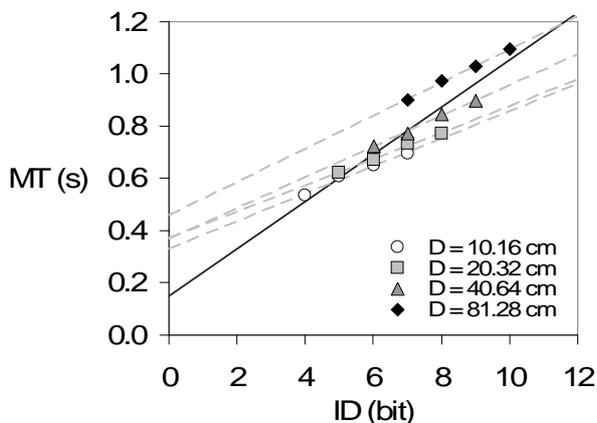


Fig. 5 Données originales de Fitts (Exp. 2) [1]. Le trait continu montre la droite de régression obtenue selon sa méthode, toujours en usage. Les traits discontinus illustrent les droites de régressions calculées séparément pour chacun des quatre niveaux d'échelle de la tâche, la séparation permettant de décaler l'effet d'échelle de celui de l' $ID$ .

En fait, la droite de régression obtenue avec cette méthode usuelle confond deux effets, celui de l' $ID$  et celui de l'échelle. La méprise est rattrapable en recalculant la régression *séparément* pour chaque valeur d'échelle (droites en pointillés). On trouve alors quatre estimations de la loi de Fitts dont les pentes moyennes sont bien inférieures et les ordonnées à l'origine nettement supérieures—concernant la pente, par exemple, la méthode de

Fitts produit sur ces données une surestimation de 60.1%.

## Récurrence de questions théorique insolubles

La question de savoir quelles sont les contributions respectives de la distance  $D$  et de la tolérance  $W$  (considérées l'une et l'autre dans l'absolu, en cm) à la loi de Fitts (conçue comme la dépendance d'un temps par rapport au quotient sans dimension  $D/W$ ) a fait l'objet de discussions confuses dans toutes les revues de la littérature spécialisée, sans exception. Si cette question n'a jamais pu être réglée, c'est qu'elle est insoluble, étant logiquement dénuée de sens. Puisque le problème du pointage n'admet que deux entités causales, toute hybridation entre l'interprétation polaire (forme et échelle de la tâche) et l'interprétation cartésienne (distance et tolérance) est source d'incohérences théoriques et d'erreurs de mesure expérimentale.

## REMERCIEMENTS

Merci à Shumin Zhai, Michel Beaudouin-Lafon, Olivier Chapuis et Jean Kergomard pour de fructueuses discussions. Subventions de l'ACI MD du Ministère de la recherche (projet Micromégas) et du programme 'blanc' de l'ANR (projet TennisServer).

## BIBLIOGRAPHIE

1. Fitts, P.M. The information capacity of the human motor system in controlling the amplitude of movement. *J. Exp. Psychology*. 47 (1954), 381-391. Reprinted in *J. Exp. Psychology General* 121, 3, 262-269 (1992).
2. Hick, On the rate of gain of information. *Quart. J. Exp. Psychol.*, 4, 11-26 (1952).
3. Langolf, G.D., Chaffin, D.B., & Foulke, J.A. An investigation of Fitts' law using a wide range of movement amplitudes. *Journal of Motor Behavior*, 8, 113-128 (1976).
4. MacKenzie, I.S. Fitts' law as a research and design tool in human-computer interaction. *Human-Computer Interaction* 7 (1992), 91-139.
5. Meehl, P.E. The problem is epistemology, not statistics: Replace significance tests by confidence intervals and quantify accuracy of risky numerical predictions. In L.L. Harlow, S.A. Mulaik, and J.H. Steiger (Eds.), *What if there were no significance tests?* (pp. 393-425). Mahwah, NJ: Erlbaum (1997).
6. Norman, D.A. *The design of everyday things*. New York: First Doubleday Currency (1988).
7. Woodworth, R. S. Accuracy of voluntary movement. *Psychological Review*, 3 (Whole N° 13), 1-114 (1899).